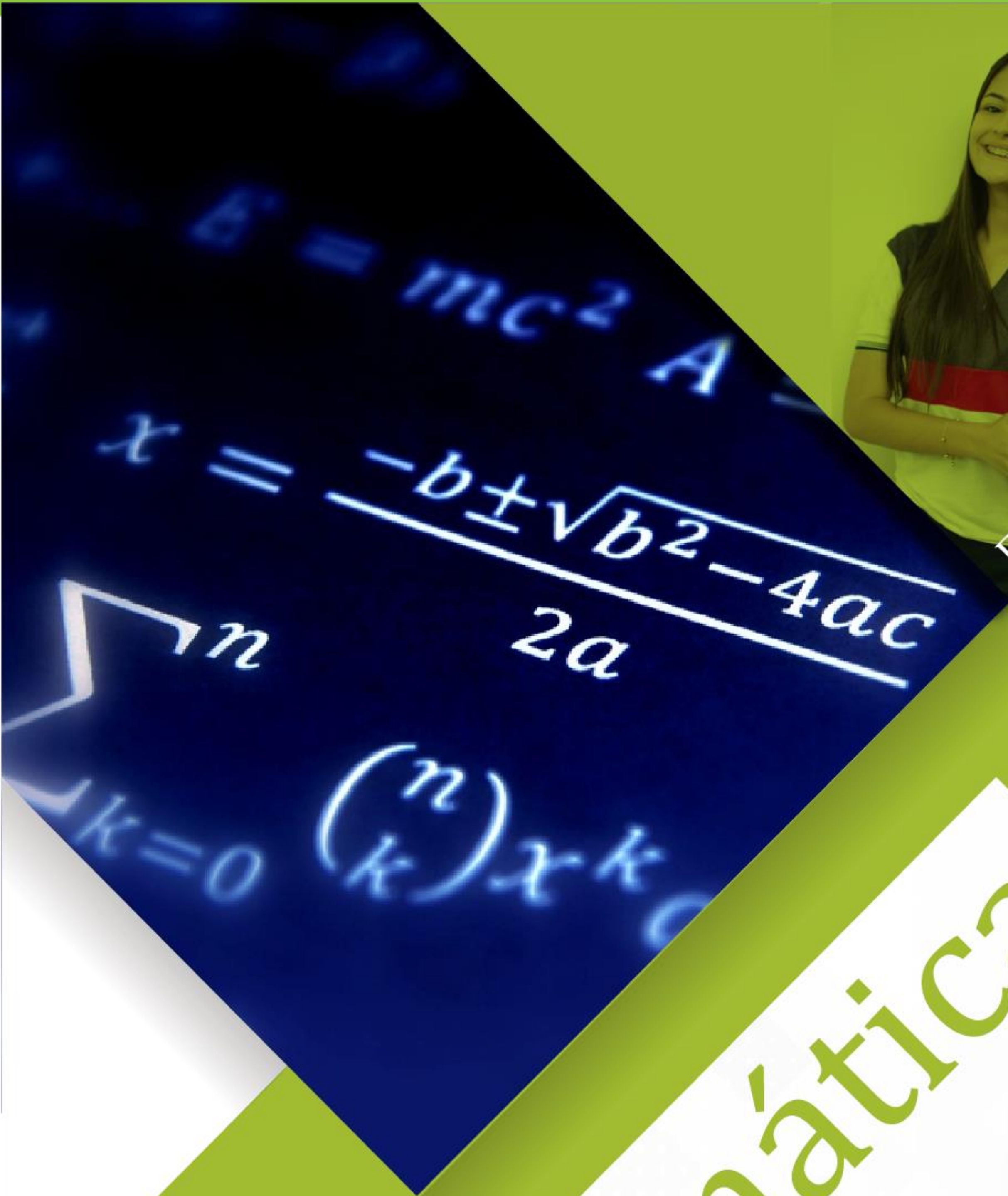


Ensino Fundamental

9º ano

Matemática

Manual exclusivo do aluno

INSTITUTO EDUCACIONAL
VERA CRUZ

Capítulo 1 – Cálculo com números reais
Potenciação

Elementos de uma potenciação:

Potência de um número real com expoente natural

Dado um número real "a" qualquer e um número natural "n" sendo n>1, a potência a^n é o produto de n fatores iguais ao fator a.

$a^n = a . a . a . a .... a$

Exemplos:

a) $5^3 = 5 . 5 . 5$
b) $4^2 = 4 . 4$

Potência de um número real com expoente inteiro

Os números inteiros dividem-se em inteiros positivos, inteiros negativos e o número zero. Sendo assim, a maneira de calcular as potências quando o expoente é negativo, difere do cálculo para expoentes positivos.

Potência com expoente negativo

Seja x^{-y} uma potência de expoente negativo, o resultado dessa operação é: o inverso de x elevado a y, em termos matemáticos:

$$(1/x)^{-y}.$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$

b) $10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{1} = \frac{1}{10}$

c) **Definições**

Todo número elevado à zero é igual a um

$a^0=1$

Potência com expoente 1

Qualquer número, elevado a 1 será igual a ele mesmo. De modo geral: $a^1=a$

Toda potência de base 1 é igual ao próprio 1.

Nas potências com base 1, dados por 1^n, sendo ***n*** pertencente aos reais, não importa o valor de "n", será sempre 1.

$1^n = 1$

Potências com base igual a 0

Toda potência com base igual a 0, 0^n, sendo o expoente n >0, será igual a zero.

$$0^n = 0$$

Propriedades de Potência

Produto de Potências de mesma base: No produto de potências de mesma base, repete-se a base e soma-se os expoentes.
Exemplo: $2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$.

Quociente de Potências de mesma base: No quociente de potências de mesma base, repete-se a base e subtrai-se os expoentes.
Exemplo: $2^3 . 2^2 = 2^{3-2} = 2^1$.

Potência de Potência: Nos casos em que há uma potenciação elevada a um outro expoente, existem duas situações que devem ser analisadas.
1ª situação: Caso em que a primeira potência está separada da segunda por parênteses.
Exemplo: $(3^2)^3$ - Nesses casos, resolve-se primeiro a primeira potência para que assim, possa-se resolver a potência externa aos parênteses. Assim, $3^2 = 3 . 3 = 9$ e $9^3 = 9 . 9 .9 = 729$. Mas há uma outra maneira de resolver estes tipos de potências, basta que se multiplique o expoente de dentro do parêntese pelo expoente que está fora. Desse modo, temos: $(3^2)^3 = 3^6 = 3. 3. 3. 3. 3. 3 = 729$.
2ª situação: Caso a primeira potência não esteja separada por parênteses da segunda, elevamos primeiro os expoentes um ao outro, e depois resolvemos a potência com a base inicial.

Potência de uma multiplicação: A multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um dado expoente é igual a multiplicação desses fatores, cada um elevado ao mesmo expoente:

Exemplo: $(a . b)^n = (a^n . b^n)$

Potência de uma divisão: A divisão de dois fatores elevados a um dado expoente é igual a divisão desses fatores, cada um elevado ao mesmo expoente.

Exemplo: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potência de base 10

Na potência de base 10 algumas definições são importantes:

1ª: O número de zeros na potência é igual ao valor do expoente.

Exemplo: $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$.

2º: Quando a potência possui expoente negativo, o resultado será um número decimal, onde o número de zeros a esquerda do 1, é igual ao valor absoluto do expoente.

Exemplo: $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$

3º: Quando se multiplica um número decimal por 10, 10^2, 10^3, ..., a vírgula do número decimal se desloca para a direita, ou seja, o valor desse número tende a aumentar.

Exemplo: $0{,}65 \cdot 10 = 6{,}5$; $7{,}6 \cdot 10^2 = 7{,}6 \cdot 100 = 760{,}0$

4º: Quando se multiplica um número decimal por uma potência de base 10, porém com expoente negativo, o produto será também um decimal, e a vírgula, desloca-se para a esquerda, ou seja, o valor desse número diminuirá.

Exemplo: $45{,}8 \cdot 10^{-1} = 45{,}8 \cdot 1/10 = 45{,}8/10 = 4{,}58$.

Notação científica

Em notação científica, um dos fatores é um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 10 e o outro fator é uma potência de 10.

Situações envolvendo notação científica:

1. No pulmão humano, existe aproximadamente 300 000 000 alvéolos pulmonares.
   Esse número apresenta muitos algarismos iguais a zero. Dessa forma, podemos reescrevê-lo em notação cientifica. Assim sendo, temos: $300\,000\,000 = 3 \cdot 10^8$
2. Algumas doenças são causadas por vírus. Um determinado vírus tem cerca de $0{,}000\,000\,000\,000\,000\,02 = 2 \cdot 10^{-17}$.

Exercícios propostos

1. A massa da terra é 6 588 000 000 000 000 000 000 toneladas. Escreva esse número em notação científica.

   ____

2. Um átomo é formado por prótons, nêutrons e elétrons. A massa de um elétron em repouso é: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg. Determine a massa do elétron em notação científica.

   ____

3. Determine o valor desses números decimais, em potência de base 10.
   a. 0,00001
   b. 10 000 000
   c. 0,000000001
   d. 100000000000
4. Se uma lapiseira custa R$0,70. Quanto irá custar:
   a. 10 lapiseiras?
   ____
   b. 100 lapiseiras?
   ____
   c. 1000 lapiseiras?
   ____
5. Aplique as propriedades de potência para escrever a expressão $\frac{4^3 \cdot 8^2 \cdot 2^3}{2^3 \cdot 256^2}$ na forma de uma única potência de base 2.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
6. As potências 3^{-4} e $(-3)^{-4}$ são iguais? Justifique efetuando o cálculo.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
7. No depósito de uma loja há 12 caixas, cada caixa contém 12 latas, e cada lata contém 12 balas. Quantas balas há no depósito?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
8. Considere as igualdades a, b e c.
   a. $8^x - 5^x = 3^x$
   b. $5^{2x} - 3x = 2^x$
   c. $9^x \cdot 3^x = 3^{3x}$

   É correto afirmar que:

   i. As três igualdades são verdadeiras.
   ii. As três igualdades são falsas.
   iii. I e II são verdadeiras.
   iv. II e III são verdadeiras.
   v. Apenas uma das igualdades é verdadeira.

Radiciação

A radiciação é a operação inversa da potenciação. O sinal que denota a radiciação é:

$$\sqrt[n]{x}$$

Assim sendo, cada letra recebe uma nomenclatura especifica dentro dessa simbologia, sendo estas, definidas a seguir:

N – Representa o índice é tem que ser maior ou igual a 2. Indica quantas vezes o número procurado foi multiplicado por ele mesmo.
X - Radicando. Indica o resultado da multiplicação do número procurado, por ele mesmo.
Obs.: Quando não aparecer índice (explicito) na operação, isso quer dizer que o índice será 2. Raízes em que o índice é 2, recebem o nome de raiz quadrada; E raízes em que o índice é 3 recebem o nome de raiz cúbica.

Exemplos:
$\sqrt[3]{27}$ (Lê-se raiz cúbica de 27);
$\sqrt[5]{32}$ (Lê-se raiz quinta de 32);
$\sqrt{400}$ (Lê-se raiz quadrada de 400).

Potências com expoentes racionais

DEFINIÇÃO

Seja "a" um número real positivo e p/q uma fração, onde p é um número inteiro e q é um número natural diferente de 0 (zero). Tem-se que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemplo:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

Propriedades de Radicais

1º propriedade: A raiz enésima de um número elevado a enésima potência é o próprio número. Em outras palavras, essa propriedade trata das raízes em que o índice do radical é igual ao expoente do radicando. Observe:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

2º propriedade: O índice de uma raiz pode ser multiplicado (ou dividido) por um número real qualquer, desde que o expoente do radicando também seja multiplicado (ou dividido) pelo mesmo número. Matematicamente, tem-se:

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n:p]{x^{m:p}}$$

3ª Propriedade: A raiz enésima do produto é igual ao produto das raízes enésimas. Isto é:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

4ª Propriedade: A raiz enésima do quociente é igual ao quociente entre as raízes enésimas. Observe:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

5ª Propriedade: Uma potência de uma raiz pode ser reescrita trazendo o expoente para o radicando. Matematicamente, tem-se que:

$$(\sqrt[n]{a^k})^m = \sqrt[n]{a^{k.m}}$$

6ª Propriedade: Considerando a raiz enésima da raiz enésima de um número, é possível obter o seu resultado utilizando o seguinte:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

7ª Propriedade: Todo radical pode ser escrito na forma de potência com expoente racional. Assim, tem-se:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Simplificação de raízes não exatas

Fatores que pertencem ao radicando, cujos expoentes são iguais ou superiores que o índice da raiz, podem ser extraídos. Realizamos isso através da decomposição em fatores primos, do radicando.
Exemplo: Determine a raiz cúbica de 256. Ou seja:

$$\sqrt[3]{256}$$

Inicialmente, use a decomposição em fatores primos de 256:

256|2
128|2
64|2
32|2
16|2
8|2
4|2
2|2
1
$256 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2$

Em seguida, reorganize os fatores em potências de expoente 3 dentro do radical. Observe:

$$\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2}$$

Para finalizar, basta que utilize uma propriedade dos radicais para fazer a simplificação da raiz obtida anteriormente, assim sendo:

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2}$$
$$\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2}$$
$$2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2}$$

Comparação de radicais

Para **radicais com mesmo índice,** será maior aquele que tiver maior radicando. Mas, para **radicais com índices diferentes,** tem-se que utilizar uma das propriedades de radiciação e transformar os radicais em radicais de mesmo índice. Só assim, pode-se comparar esses radicais.

Operações com radicais

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

1ºCASO : Os radicais não são semelhantes
Devemos proceder do seguinte modo:
a)Extrair as raízes (exatas ou aproximadas)
b) Somar ou subtrair os resultados.

2ºCASO: Os radicais são semelhantes.
Para adicionar ou subtrair radicais semelhantes, procedemos como na redução de termos semelhantes de uma soma algébrica.
Exemplo:

$$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (5+3)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

3º CASO: Os radicais tornam-se semelhantes depois de simplificados.
Exemplo:

$$5\sqrt{3} + \sqrt{12}$$
$$5\sqrt{3} + \sqrt{2^2.3}$$
$$5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$
$$7\sqrt{3}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

1º Caso – Radicais com mesmo índice: Efetuamos a operação entre os radicandos.
Exemplos:

a) $\sqrt{5} . \sqrt{7} = \sqrt{35}$
b) $4\sqrt{2} . 5\sqrt{3} = 20\sqrt{6}$

2º Caso – Radicais com índices diferentes:
Inicialmente devemos reduzi-los ao mesmo índice
Exemplo:

$$\sqrt[3]{2} . \sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2} . \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{4} . \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{500}$$

Racionalização de denominadores

A racionalização de denominadores consiste em obter uma nova fração, equivalente, de uma fração com denominador racional, que possuía um ou mais radicais em seu denominador. Para racionalizar o denominador de uma fração, devemos multiplicar os termos desta fração por uma expressão com radical, denominado fator racionalizante, obtendo assim uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

Casos de racionalização

1º caso: O denominador é um radical de índice 2.
Exemplo:

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\sqrt{a}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a}$,
pois $\sqrt{a}\ \sqrt{a}\ \sqrt{a^2} = a$

2º caso: O denominador é um radical de índice diferente de 2, ou a soma (ou diferença) de dois termos.

Neste caso, é necessário multiplicar o numerador e o denominador da fração por um termo conveniente, para que desapareça o radical que se encontra no denominador. Exemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{7}} = \frac{3.\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{7}^2} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{3\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Os principais fatores racionalizantes são:

$\sqrt[n]{a^{n-m}}$ é o fator racionalizante de $\sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$\sqrt{a} + b$ é o fator racionalizante de $\sqrt{a} - b$

Exercícios Propostos

1. Racionalize os denominadores:

a. $\frac{7.\sqrt{5}}{\sqrt{5}} =$

b. $\frac{3}{\sqrt{8}} =$

c. $\dfrac{6}{\sqrt{145}} =$

d. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{6}} =$

e. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{27}} =$

2. Efetue as operações, escrevendo de forma mais simplificada:

a. $\sqrt{45} \div \sqrt{5} =$

b. $\sqrt{5} \div \sqrt[3]{4} =$

3. Simplifique utilizando as propriedades de radicais.

a. $\left(\sqrt{5}\right)^3 =$

b. $\sqrt{\dfrac{1}{16}} =$

c. $\dfrac{\sqrt[5]{13}}{\sqrt[5]{9}} =$

Rascunho (Efetue seus cálculos aqui)

Capitulo 2 – Equações Polinomiais de 2º grau

Equações polinomiais de 2º grau

As **equações polinomiais do segundo grau** recebem esse nome porque são uma equação polinomial cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Numa equação do 2º grau, o **x** é a incógnita e representa um valor desconhecido. Já as letras **a**, **b** e **c** são chamadas de coeficientes da equação. Os coeficientes são números reais e o coeficiente **a** tem que ser diferente de zero, pois do contrário passa a ser uma equação do 1º grau. Resolver uma equação de segundo Grau, significa buscar valores reais de **x**, que tornam a equação verdadeira. Esses valores são denominados raízes da equação. Uma equação quadrática possui no máximo duas raízes reais.

Equações do 2º Grau Completas e Incompletas

As equações do 2º grau **completas** são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja, a, b e c são diferentes de zero ($a, b, c \neq 0$). Por exemplo, a equação $5x^2 + 2x + 2 = 0$ é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero ($a = 5$, $b = 2$ e $c = 2$).

Uma equação quadrática é **incompleta** quando $b = 0$ ou $c = 0$ ou $b = c = 0$. Por exemplo, a equação $2x^2 = 0$ é incompleta, pois $a = 2$, $b = 0$ e $c = 0$.

Exemplo:

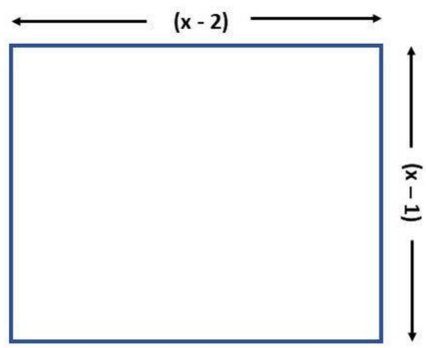
1) Determine os valores de **x** que tornam a equação $4x^2 - 16 = 0$ verdadeira.

Solução:

A equação dada é uma equação incompleta do 2º grau, com $b = 0$. Para equações deste tipo, podemos resolver, isolando o **x**. Desse modo, perceba que a raiz quadrada de 4 pode ser 2 e - 2, pois esses dois números elevados ao quadrado resultam em 4.

Assim, as raízes da equação $4x^2 - 16 = 0$ são $\mathbf{x = -2}$ e $\mathbf{x = 2}$

2) Encontre o valor do x para que a área do retângulo abaixo seja igual a 2.



Solução:
A área do retângulo é encontrada multiplicando-se a base pela altura. Assim, devemos multiplicar os valores dados e igualar a 2.

$$(x - 2) . (x - 1) = 2$$

Agora vamos multiplicar todos os termos:

$$x . x - 1 . x - 2 . x - 2 . (- 1) = 2$$
$$x^2 - 1x - 2x + 2 = 2$$
$$x^2 - 3x + 2 - 2 = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$

Após resolver as multiplicações e simplificações, encontramos uma equação incompleta do segundo grau, com c = 0.
Esse tipo de equação pode ser resolvida através da fatoração, pois o **x** se repete em ambos os termos. Assim, iremos colocá-lo em evidência.
$x . (x - 3) = 0$
Para o produto ser igual a zero, ou x = 0 ou (x - 3) = 0. Contudo, substituindo **x** por zero, as medidas dos lados ficam negativas, portanto, esse valor não será resposta da questão. Então, temos que o único resultado possível é (x - 3) = 0. Resolvendo essa equação:
$x - 3 = 0$
$x = 3$
Desta forma, o valor do **x** para que a área do retângulo seja igual a 2 é **x = 3**.

Fórmula de Bhaskara

Quando uma equação do segundo grau é completa, usamos a Fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes da equação.
Fórmula do Delta:
Na fórmula de Bhaskara, aparece a letra grega **Δ (delta)**, que é chamada de discriminante da equação, pois de acordo com o seu valor é possível saber qual o número de raízes que a equação terá.
Para calcular o delta usamos a seguinte fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para resolver uma equação do 2º grau, usando a fórmula de Bhaskara, devemos seguir os seguintes passos:
1º Passo: Identificar os coeficientes **a**, **b** e **c**.
Nem sempre os termos da equação aparecem na mesma ordem, portanto, é importante saber identificar os coeficientes, independente da sequência em que estão. O coeficiente **a** é o número que está junto com o x^2, o **b** é o número que acompanha o **x** e o **c** é o termo independente, ou seja, o número que aparece sem o x.
2º Passo: Calcular o delta.
Para calcular as raízes é necessário conhecer o valor do delta. Para isso, substituímos as letras na fórmula pelos valores dos coeficientes.
Podemos, a partir do valor do delta, saber previamente o número de raízes que terá a equação do 2º grau. Ou seja, se o valor de Δ for maior que zero (**Δ > 0**), a equação terá duas raízes reais e distintas. Se ao contrário, delta for menor que zero (**Δ<0), a equação não apresentará raízes reais e se for igual a zero (Δ = 0), a equação apresentará somente uma raiz.**
3º Passo: Calcular as raízes.
Se o valor encontrado para delta for negativo, não precisa fazer mais nenhum cálculo e a resposta será que a equação não possui raízes reais.
Caso o valor do delta seja igual ou maior que zero, devemos substituir todas as letras pelos seus valores na fórmula de Bhaskara e calcular as raízes.
Exercício Resolvido
Determine as raízes da equação $2x^2 - 3x - 5 = 0$
Solução:
Para resolver, primeiro devemos identificar os coeficientes, assim temos:
a = 2
b = - 3
c = - 5
Agora, podemos encontrar o valor do delta. Devemos tomar cuidado com as regras de sinais e lembrar que primeiro devemos resolver a potenciação e a multiplicação e depois a soma e a subtração.
$\Delta = (- 3)^2 - 4 . (- 5) . 2 = 9 +40 = 49$
Como o valor encontrado é positivo, encontraremos dois valores distintos para as raízes. Assim, devemos resolver a fórmula de Bhaskara duas vezes. Temos então:
$X = [- (-3) + 7]/2 = 10/4 = 5/2$ e $x = [- (-3) – 7]/4 = -4/4 = - 1$.
Assim, as raízes da equação $2x^2 - 3x - 5 = 0$ são **x = 5/2** e **x = -1**

Composição de uma equação do 2º grau a partir de suas raízes

Sabendo o valor da soma e do produto das raízes de uma equação do 2º grau, é possível determinar a expressão que representa essa equação. Considere a equação do 2º grau $ax^2+bx+c = 0$. Como a≠0, dividimos ambos os membros da equação por a: $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, ou seja, $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$. De acordo com as relações de Girard, sabemos que: $\frac{-b}{a} = S$ e $\frac{c}{a} = P$.
Substituindo : $\frac{b}{a}$ por - S e $\frac{c}{a} =$ por P em $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, temos:
$X^2 - Sx + P = 0$

Exemplo

Veja como podemos escrever uma equação do 2º grau na incógnita *x* sabendo que suas raízes são 2 e $\frac{3}{5}$.

Sabemos que:

$S = x_1 + x_2 = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

$P = x_1 . x_2 = 2 . \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

Substituindo *S* por $\frac{13}{5}$ e *P* por $\frac{6}{5}$ em $X^2 + Sx + P = 0$, temos:

$X^2 - \frac{13}{5} x + \frac{6}{5} = 0$

Logo, a equação procurada é $X^2 - \frac{13}{5} x + \frac{6}{5} = 0$.

Equações Biquadradas

Equações biquadradas são equações escritas pela seguinte forma geral: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Para resolver é preciso transformá-las em equações do segundo grau.

Para melhor compreender, o exemplo abaixo mostra como essa transformação acontece e como encontra-se as raízes da equação biquadrada.

Exemplo: $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$ → equação biquadrada

$(y^2)^2 - 10y^2 + 9 = 0$ → também pode ser escrita assim.

Substituindo a variável x por y, tem-se: $y^2 = x$, isso significa que onde for y^2 iremos colocar x.

$x^2 - 10x + 9 = 0$ → agora resolvemos essa equação do 2º grau encontrando x\` e x\`\`

$a = 1 \quad b = -10 \quad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4 . 1 . 9$

$\Delta = 100 - 36$

$\Delta = 64$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 . 1}$

$x = \frac{10 \pm 8}{2}$

$x' = 9$

$x'' = 1$

Essas são as raízes da equação $x^2 - 10x + 9 = 0$, para encontrarmos as raízes da equação biquadrada $y^4 - 10y2 + 9 = 0$ devemos substituir os valores de x' e x'' em $\mathbf{y^2 = x}$.

Para x = 9

$y^2 = x$

$y^2 = 9$

$y = \pm \sqrt{9}$

$y = \pm 3$

Para x = 1

$y^2 = x$

$y^2 = 1$

$y = \pm \sqrt{1}$

$y = \pm 1$

Portanto, a solução da equação biquadrada será: S = {-3, -1, 1, 3}.

Equações irracionais

Considere as seguintes equações:

$\sqrt{x+2} = 3 \qquad \sqrt[3]{x-1} = 2 \qquad \sqrt{x} = 2 + x$

Observe que todas elas apresentam variável ou incógnita no radicando. Essas equações são **irracionais.** Ou seja:

Definição: Equação irracional é toda equação que tem variável no radicando.

Resolução de uma equação irracional

A resolução de uma equação irracional deve ser efetuada procurando transformá-la inicialmente numa equação racional, obtida ao elevarmos ambos os membros da equação a uma potência conveniente.

Em seguida, resolvemos a equação racional encontrada e, finalmente, verificamos se as raízes da equação racional obtidas podem ou não ser aceitas como raízes da equação irracional dada (*verificar a igualdade).*

É necessária essa verificação, pois, ao elevarmos os dois membros de uma equação a uma potência, podem aparecer na equação obtida **raízes estranhas** à equação dada.

Observe alguns exemplos de resolução de equações irracionais no conjunto dos reais.

$\sqrt{x+6} = 8$

Solução:

$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = 8^2$ → Elevando ambos os membros ao quadrado.

$x + 6 = 64$

$x = 58$

Verificação:

$\sqrt{58+6} = 8$

$\sqrt{64} = 8$

$8 = 8 \, (V)$

Assim, V= {58}.

- $\sqrt{6-x} + x = 0$

- **Solução**:

$$\sqrt{6-x} = -x$$
$$\left(\sqrt{6-x}\right)^2 = (-x)^2 \rightarrow \text{Elevando ambos os membros ao quadrado.}$$
$$6 - x = x^2$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x' = 2 \quad e \quad x'' = -3$$

Verificação:

$$\sqrt{6-2} + (+2) = 0$$
$$\sqrt{4} + 2 = 0$$
$$2 + 2 = 0$$
$$4 = 0\ (F)$$
$$\sqrt{6-(-3)} + (-3) = 0$$
$$\sqrt{9} - 3 = 0$$
$$3 - 3 = 0\ (V)$$

Logo, V= { -3}; note que 2 é uma raiz estranha a essa equação irracional.

- $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$

Solução:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-5} = -1$$
$$\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-5}\right)^2 = (-1)^2$$
$$x + 2 - 2.\sqrt{x+2}.\sqrt{3x-5} + 3x - 5 = 1$$
$$-2.\sqrt{(x+2)(3x-5)} = -4x + 4$$
$$-\sqrt{3x^2 + x - 10} = -2x + 2$$
$$\left(-\sqrt{3x^2 + x - 10}\right)^2 = (-2x+2)^2$$
$$3x^2 + x - 10 = 4x^2 - 8x + 4$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0$$
$$x' = 2 \quad e \quad x'' = 7$$

Verificação:

$$\sqrt{2+2} = \sqrt{3.2-5} - 1$$
$$\sqrt{4} = \sqrt{1} - 1$$
$$2 = 1 - 1$$
$$2 = 0\ (F)$$
$$\sqrt{7+2} = \sqrt{3.7-5} - 1$$
$$\sqrt{9} = \sqrt{16} - 1$$
$$3 = 3\ (V)$$

Logo, V= { 7 }; note que 2 é uma raiz estranha a essa equação irracional.

Sistemas de equações de 2º grau

Para resolver sistemas de equações de 2º grau, devemos aplicar alguns métodos que servem para resolução de sistemas de equações de 1º grau, métodos esses da adição ou substituição. Assim sendo, os exemplos a seguir denotam a resolução de um sistema de equações de 2º grau.

Exemplo resolvido

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Isolando x ou y na 2ª equação do sistema:
$x + y = 6$
$x = 6 - y$
Substituindo o valor de x na 1ª equação:
$x^2 + y^2 = 20$
$(6 - y)^2 + y^2 = 20$
$(6)^2 - 2 * 6 * y + (y)^2 + y^2 = 20$
$36 - 12y + y^2 + y^2 - 20 = 0$
$16 - 12y + 2y^2 = 0$
$2y^2 - 12y + 16 = 0$ (dividir todos os membros da equação por 2 gera uma equação equivalente)
$y^2 - 6y + 8 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4 * 1 * 8$
$\Delta = 36 - 32$
$\Delta = 4$
a = 1, b = −6 e c = 8

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$y = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$y' = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$y'' = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Determinando os valores de x em relação aos valores de y obtidos:
Para y = 4, temos:
$x = 6 - y$
$x = 6 - 4$
$x = 2$
Par ordenado (2; 4)
Para y = 2, temos:
$x = 6 - y$
$x = 6 - 2$
$x = 4$
Par ordenado (4; 2)
S = {(2: 4) e (4; 2)}

Exemplo 2

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 18 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Isolando x ou y na 2ª equação:
$x - y = -3$
$x = y - 3$
Substituindo o valor de x na 1ª equação:
$x^2 + 2y^2 = 18$
$(y - 3)^2 + 2y^2 = 18$
$y^2 - 6y + 9 + 2y^2 - 18 = 0$
$3y^2 - 6y - 9 = 0$ (dividir todos os membros da equação por 3, obtemos uma equação equivalente)
$y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-2)^2 - 4 * 1 * (-3)$
$\Delta = 4 + 12$
$\Delta = 16$
a = 1, b = −2 e c = −3

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2*1}$$
$$y = \frac{2 \pm 4}{2}$$
$$y' = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$y'' = \frac{2-4}{2} = -1$$

Determinando os valores de x em relação aos valores de y obtidos:
Para y = 3, temos:
x = y – 3
x = 3 – 3
x = 0
Par ordenado (0; 3)
Para y = –1, temos:
x = y – 3
x = –1 –3
x = –4

Par ordenado (–4; –1)
S = {(0; 3) e (–4; –1)}

Exercícios Propostos

1. Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:
   a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$
   b) $3x^2 + 55 = 0$
   c) $x^2 - 6x = 0$
   d) $x^2 - 10x + 25 = 0$
2. Determine as raízes das equações:
   a) $x^2 - x - 20 = 0$
   b) $x^2 - 3x - 4 = 0$
   c) $x^2 - 8x + 7 = 0$
3. Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação $x^2-2x-8= 0$?
4. O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c:
5. Se você multiplicar um número real **x** por ele mesmo e do resultado subtrair 14, você vai obter o quíntuplo do número **x**. Qual é esse número?
6. Determine o conjunto solução da seguinte equação biquadrada: $x^4 – 5x^2 + 4 = 0$.
7. Calcule as raízes da seguinte equação: $4x^4 – 9x^2 + 2 = 0$.
8. (FACESP) O conjunto solução, no campo real, da equação $z^4 – 13z^2 + 36 = 0$ é:

a) S = {-3, -2, 0, 2, 3}
b) S = {-3, -2, 2, 3}
c) S = {-2, -3}
d) S = {0, 2, 3}
e) S = {2, 3}

9. Resolva o sistema a seguir no conjunto dos números reais:

$$\begin{cases} 3x - y^2 = 4 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

10. Resolva o sistema de equações no conjunto dos números reais:

Capítulo 3 – Noções de Funções

Funções

Noções de Funções

Quando se relaciona grandezas variáveis, estão, em geral, tratando da ideia de uma função. Ideia essa muito utilizada na Matemática e em outras Ciências.

A ideia de função que atualmente é utilizada, sofreu várias modificações ao longo do tempo, e hoje está associada a ideia de conjuntos numéricos.

Podemos identificar a ideia de função nos seguintes exemplos:

- O valor da conta de energia é calculado em função do consumo em determinado período de tempo.
- O preço cobrado por um taxista está em função da distância percorrida por ele.
- O tempo de uma viagem, varia em função da velocidade praticada ao longo do espaço percorrido.

Veja, agora uma situação efetiva da utilização de uma função.

Exemplo resolvido: Para acessar a internet, Douglas vai a uma lan-house, cuja forma de cobrança é a seguinte: uma taxa fixa de R$ 3,00 mais R$ 2,50 por hora de acesso. Expresse o valor (y) pago por Douglas em função do número de horas (x) de acesso a internet.

Neste caso, a função será escrita da seguinte forma:

Y - (Valor a ser pago)
X – (Número de horas de acesso)
Assim, temos que: y = 3,00 + 2,50x

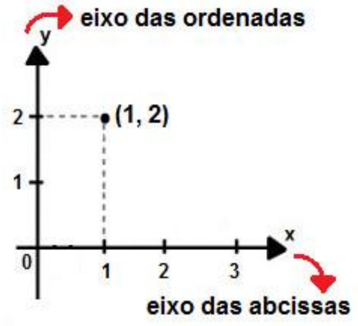
Essa forma, recebe o nome de Lei de formação da função apresentada e varia de situação para situação.

De maneira geral, temos que y = f(x) (lê-se f de x), e podemos utilizar qualquer letra para identificar uma função, porém é mais comum a utilização de f, g e h. Chamamos também a variável x de variável independente e também pode ser representada por qualquer outra variável, porém x é o mais comum.

Lembrem que toda função é expressa em um plano cartesiano, onde as variáveis x e y (f(x)) tem suas respectivas representações cartesianas.

Construção de tabelas e gráficos de função

A construção de gráficos é de extrema importância. O gráfico de uma função pode ser considerado o seu reflexo. Através do gráfico, podemos definir de que tipo é a função mesmo sem saber qual é a sua lei de formação. Isso porque cada função tem sua representação gráfica particular. Para tanto, é fundamental conhecer algumas definições: **Plano Cartesiano** → é o local onde o gráfico é construído, e está determinado pelo encontro dos eixos cartesianos **x** e **y**, conhecidos como **eixo das abcissas** e **eixo das ordenadas**, respectivamente. Cada ponto do gráfico é conhecido como **par ordenado**, pois ele é formado pelo encontro de um valor das abcissas com um valor das ordenadas. A linha que une os pares ordenados é conhecida como curva da função.



Vejamos os princípios básicos para construir o gráfico de uma função, seja ela de 1º ou 2º grau.

1°) escolher valores para x:

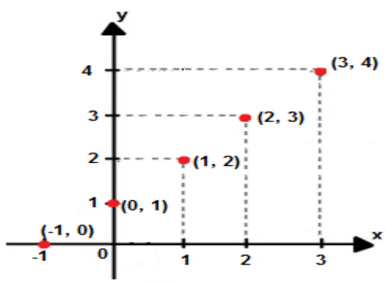
Para iniciar a construção do gráfico, é preciso escolher valores para a variável **x**. Esses valores serão substituídos na lei de formação da função para que o valor correspondente de **y (f(x))** seja determinado, bem como o par ordenado. Para montar o gráfico de uma função do 1° grau, é necessário encontrar apenas dois pontos que já visualizamos no gráfico. É importante que os valores escolhidos sejam próximos, como números subsequentes. Além disso, é sempre bom saber os pontos em que **x = 0** e **y = 0** (zero da função).

Considere a função **y = x + 1**. Montaremos uma tabela com os valores de **x** para encontrar os valores de **y**:

	y = x + 1	
x	**y**	
0 = x + 1 → x = – 1	0	
0	y = 0 + 1 → y = 1	
1	y = 1 + 1 → y = 2	
2	y = 2 + 1 → y = 3	
3	y = 3 + 1 → y = 4	

2°) encontrar os pares ordenados no plano cartesiano

Lançando cada um desses pares ordenados no plano cartesiano, encontramos os seguintes pontos:



3°) traçando o gráfico

Basta traçar uma linha ligando os pontos por uma reta para determinar o gráfico da função **y = x + 1.**

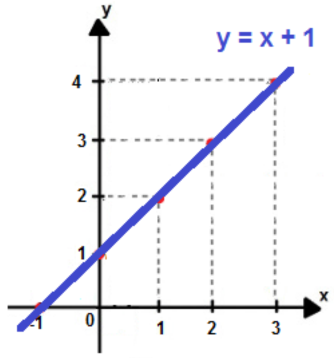


Gráfico da função y = x + 1

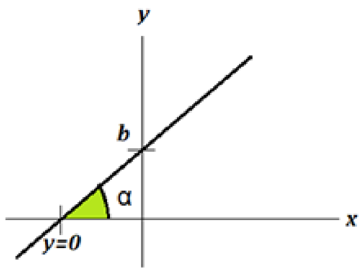
Função afim

É chamada **função afim** toda função polinomial do primeiro grau. Formalmente escrevemos que: Uma função f:R→R é uma função afim quando existem dois números reais *a* e *b* tais que satisfaçam a seguinte condição, ∀x∈R e b≠0 temos:

$$y=f(x)=ax+b$$

Onde:

- a é o coeficiente angular do gráfico de f
- b é o coeficiente linear, ou o ponto de intersecção com o eixo y
- x é a variável independente.

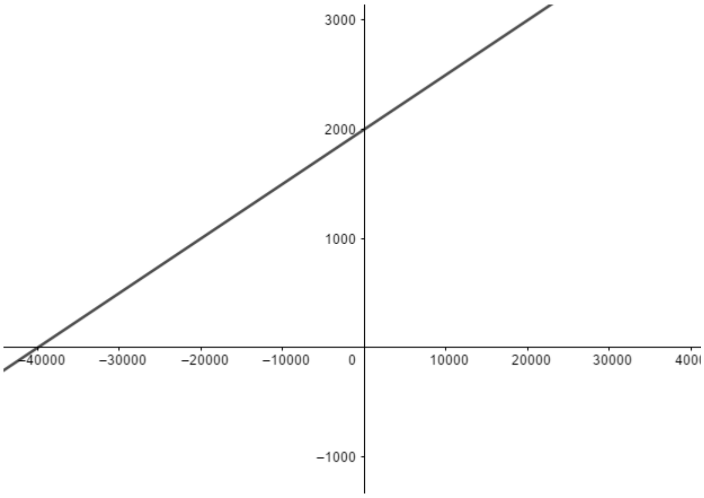


O gráfico de uma função afim será sempre uma reta. Os fatores que irão determinar a sua posição no plano são os coeficientes linear e angular, particulares de cada função.

Exemplo 1:

Supondo que você é um vendedor, cujo salário mensal é de R$ 2.000,00. Porém, a cada produto vendido você ganha uma comissão de 5%, ou 0,05 vezes o valor do produto. A função que descreverá, em função do valor vendido durante o mês é do tipo afim, e será descrita pela lei:

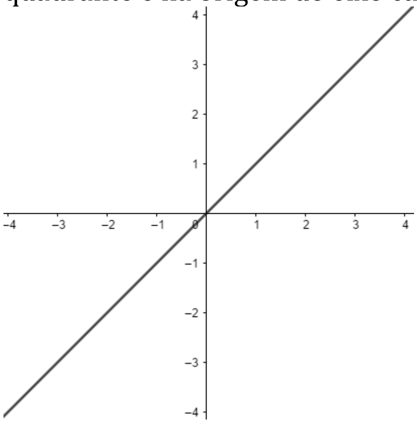
$$f(x) = 0{,}05x + 2000$$



Em seguida, iremos apresentar alguns casos particulares das funções afim. Estes são:

Função identidade

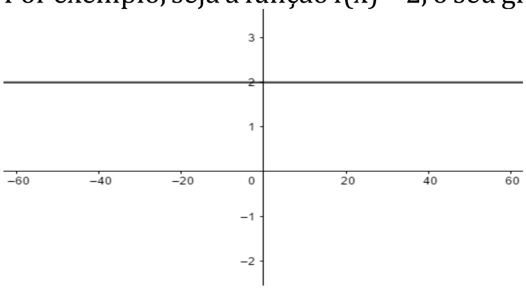
Seja uma função f:R→R definida por f(x) = x. Então, neste caso se a = 1 e b = 0, o gráfico de uma função identidade é chamada de bissetriz dos quadrantes impares, que passam pelo 1º e 3º quadrante e na origem do eixo cartesiano (0, 0).



Função constante

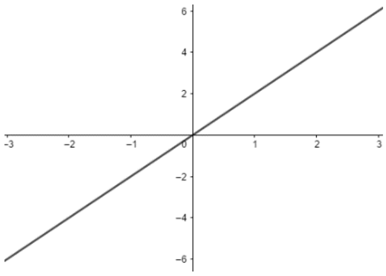
Uma função f:R→R é dita constante quando f(x) = b, logo a = 0. Seu gráfico será sempre uma reta paralela ao eixo x e que intercepta o eixo y num ponto *b*.

Por exemplo, seja a função f(x) = 2, o seu gráfico será:



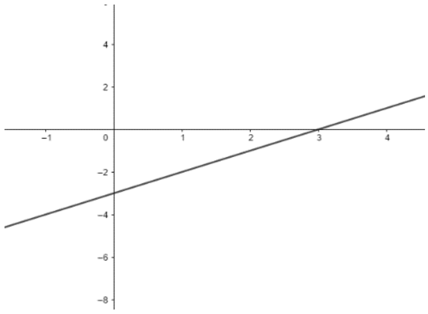
Função linear

Uma função f:R→R é dita constante quando f(x) = ax, logo b = 0. Seu gráfico será sempre uma reta paralela que intercepta a origem do eixo cartesiano. Por exemplo, a função f(x) = 2x terá a sua representação gráfica dada por:



Translação da função identidade

Se tomarmos a função identidade e acrescentarmos a ela um coeficiente linear e mantendo o seu coeficiente angular igual a 1, ocorrerá a translação da reta. A função será definida por f(x) = x+b sendo a = 1 e b≠0. Por exemplo, f(x)= x-3:



Características das Funções Afim

- Uma função afim é crescente se a > 0;
- Uma função afim é decrescente se a < 0;

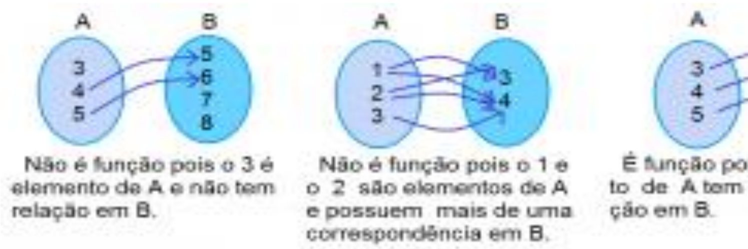
Função Quadrática

Função quadrática ou função do segundo grau é uma aplicação F de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, em que a, b e c são números reais dados e a ≠ 0. Pois se a = 0, não teremos mais uma função quadrática e sim uma função afim: y = bx +c.

$$\boxed{F(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)}$$

O que é função?

Sendo A e B conjuntos não vazios, uma relação F de A → B (lê-se A em B) é denominada aplicação de A – domínio, conjunto de partida – em B – contradomínio, conjunto de chegada –, ou função definida em A com imagens em B se para todo x ∈ A existe um só y ∈ B, tal que (x,y) ∈ F.



Exemplos de funções quadráticas:

$2x^2 + 5x + 7$, em que a = 2, b = 5 e c = 7.

$-x^2$, em que a = -1 e b = c = 0.

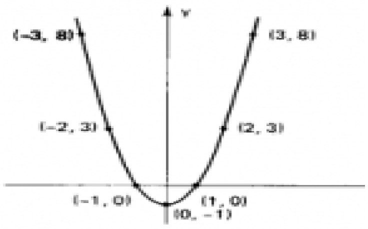
$x^2 + x + 1$, em que a = b = c = 1.
$6x^2 + 5$, em que a = 6, b = 0 e c = 5.

Gráfico da Função Quadrática

O gráfico da função quadrática é uma parábola (isso será provado em Geometria Analítica):

Construir o gráfico de $y = x^2 - 1$

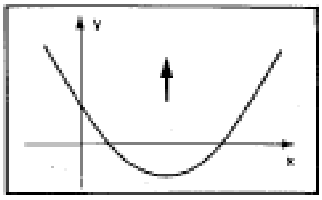
x	$y = x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8



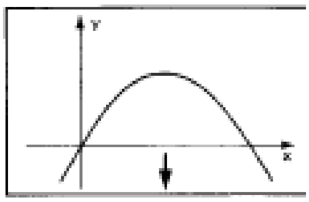
Concavidade

A parábola representativa da função quadrática pode ter sua concavidade voltada para cima ou para baixo. Isso dependerá do sinal de a:

- Se a > 0, a concavidade será voltada para cima.
- Se a < 0, a concavidade será voltada para baixo.



$a > 0$



$a < 0$

Zeros da Função Quadrática

Os zeros ou raízes da função são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ Utilizando a forma canônica temos:

i)

$$f(x) = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] \Rightarrow a = 0$$

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right] = 0$$

ii) Mas sabemos que $a \neq 0$, então:

Portanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Observemos que, para existir raízes reais na equação do segundo grau, precisamos que $\sqrt{\Delta}$ seja real. Logo, temos três casos:

i) $\Delta > 0$ e, portanto, a equação apresentará duas raízes reais e distintas, que serão: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

ii) $\Delta = 0$ e, portanto, a equação apresentará duas raízes reais e iguais, que serão: $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.

iii) $\Delta < 0$ e sabemos que, neste caso, $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, portanto, diremos que a equação não apresentará raízes reais.

Interpretando geometricamente, os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo x.

Máximo e Mínimo

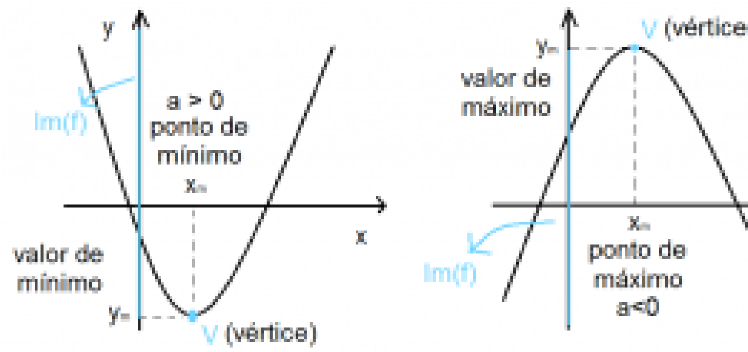
Sendo $Im(f)$ o conjunto imagem, dizemos que $y_M \in Im(f)$ é o valor de máximo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geqslant y$ para qualquer $y \in Im(f)$. E então, o número $x_M \in D(f)$, sendo $D(f)$ o conjunto domínio, é chamado de ponto de máximo da função.

Dizemos que $y_M \in Im(f)$ é o valor de mínimo da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \leqslant y$ para qualquer $y \in Im(f)$. E então, o número $x_M \in D(f)$ é chamado de ponto de mínimo da função.

Sucintamente, podemos dizer que:

i) Se $a < 0$, a função quadrática admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a},\ para\ x_M = -\dfrac{b}{2a}.$

ii) Se $a > 0$, a função quadrática admite o valor mínimo $y_M = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{4a},\ para\ x_M = -\dfrac{b}{2a}.$



Vértice da Parábola

O ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola.

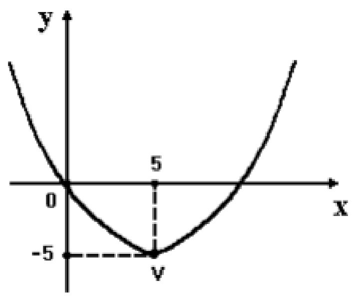
Exercícios

1. **(ENEM – 2009)** Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do

álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:
a) $V=10.000+50x-x^2$
b) $V=10.000+50x+x^2$
c) $V=15.000-50x-x^2$
d) $V=15.000+50x-x^2$
e) $V=15.000-50x+x^2$

2. (UEL) A função real f, de variável real, dada por $f(x)=-x^2+12x+20$, tem um valor:
a) mínimo igual a -16, para x = 6.
b) mínimo igual a 16, para x = -12.
c) máximo igual a 56, para x = 6.
d) máximo igual a 72, para x = 12.
e) máximo igual a 240, para x = 20.

3. (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, está representada a parábola de vértice V, gráfico da função de segundo grau cuja expressão é:
a) $y = (x^2 /5) - 2x$
b) $y = x^2 - 10x$
c) $y = x^2 + 10x$
d) $y = (x^2/5) - 10x$
e) $y = (x^2/5) + 10x$

Capítulo 4 – Estatística e Probabilidade

A Origem da Estatística

O povo inca, que dominou a cordilheira dos Andes entre o século XII e meados do século XVI, não conhecia a escrita, mas registrava informações estatísticas em sofisticados artefatos de cordas chamados **quipos**, que eram formados por cordas amarradas lado a lado; a posição e a quantidade de nós representavam valores numéricos.

A **Estatística** é o ramo da Matemática que trata da coleta, descrição, organização, análise e apresentação de dados a respeito de uma população ou de um fenômeno. Os primeiros "dados estatísticos" são de épocas muito antigas e aparecem paralelamente ao desenvolvimento da escrita. Registros históricos apontam o uso de processos, que hoje chamaríamos estatísticos, há mais de 2.000 anos antes de Cristo. Grandes impérios da Antiguidade (como o sumério, o egípcio e o chinês) e as civilizações da América pré-colombiana (maias, astecas e incas) fizeram uso do levantamento e registro de dados quantitativos para obter informações sobre sua população e suas riquezas, especialmente para fins administrativos, tributários e militares.

Talvez em virtude dessa aplicação, o termo **estatística** derive da palavra latina *status*, que significa "condição, situação" ou, em sentido mais amplo, "Estado".

Na atualidade, a Estatística é essencial para o desenvolvimento de todas as ciências, pois possibilita de forma abrangente a coleta e a análise de dados.

Coleta, organização e apresentação de dados

Em Estatística, o conjunto de todos os elementos que contêm uma característica que se quer estudar é chamado de **população estatística**.

Acontece que nem sempre é possível pesquisar todos os elementos de uma população estatística, pois em geral, a população a ser pesquisada é muito grande. Quando isso acontece, limitamos a pesquisa a uma parte da população, que chamamos de **amostra**, ao escolher uma amostra, é necessário que ela represente a população.

A coleta de dados pode ser feita por meio de observação, contagem, medida, questionário ou entrevista. A "coisa estudada"(dados) na amostra é chamada de variável, e as variáveis podem ser:

Uma variável pode ser **quantitativa** (quando assume valor numérico associado a contagem ou medida) ou **qualitativa** (quando o valor da variável é expresso por um atributo). São exemplos de variáveis quantitativas: massa, idade, altura, entre outros. Já a cor dos olhos, o tipo de roupa, entre outros, são exemplos de variáveis qualitativas.

Os dados analisados, quando estão em desordem, são denominados **dados brutos**. Essa apresentação não favorece a observação de regularidade ou tendência nos dados; para isso, é conveniente organizá-los em ordem crescente ou decrescente, denominada **rol**.

Com o rol de dados, podemos facilmente verificar a **frequência absoluta** de cada medida, que corresponde à quantidade de vezes que cada valor aparece na amostra. Com os dados organizados dessa forma, fica mais fácil organizá-los em uma **tabela de distribuição de frequências**.

A informação apresentada por meio de gráficos

Você já viu que é possível organizar dados em tabelas para facilitar a análise e a interpretação das informações. Além das tabelas, é possível organizar os dados em gráficos, que são formas de apresentação de dados cujo objetivo é possibilitar uma visão mais rápida e fácil a respeito das variáveis às quais se referem os dados.

Vamos relembrar alguns tipos de gráfico.

Gráfico de colunas

O gráfico de colunas é formado por retângulos de mesma largura, com a base no eixo horizontal e alturas proporcionais aos referidos valores indicados no eixo vertical. Esse tipo de gráfico é utilizado para fazer comparações.

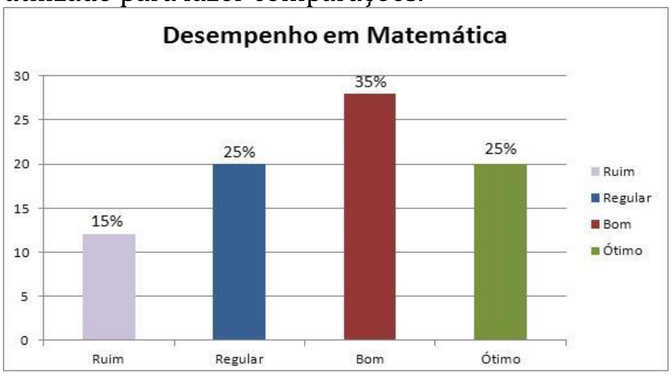


Gráfico de barras

O gráfico de barras é parecido com o gráfico de colunas, só que a base dos retângulos que formam as barras fica no *eixo vertical* e os valores, no *eixo horizontal*. Assim como o gráfico de colunas, o gráfico de barras é utilizado para fazer comparações.

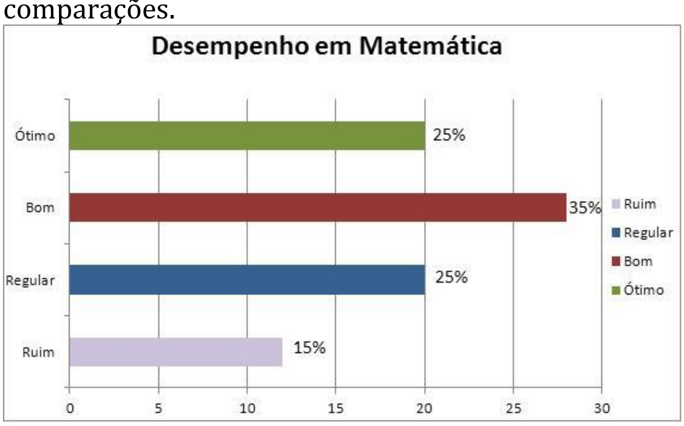


Gráfico de linha

O gráfico de linha é usado principalmente para mostrar crescimento, decrescimento ou estabilidade de um fenômeno ao longo do tempo. Ele tem dois eixos: o *horizontal*, em que são anotados os intervalos de tempo; e o *vertical* (que pode ficar oculto), em que são marcados os valores em determinada escala. Unindo os pontos obtidos, determinamos a linha do gráfico, que nos mostra o comportamento da variável.

TABELA RECEITA E DESPESAS - 1º SEMESTRE

R$ / Meses	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
Saldo anterior	500	1250	1100	1200	1400	2500
Receitas	2200	2050	1900	2500	3000	1600
Despesas	1450	2200	1800	2300	1900	1700
Saldo	1250	1100	1200	1400	2500	2400

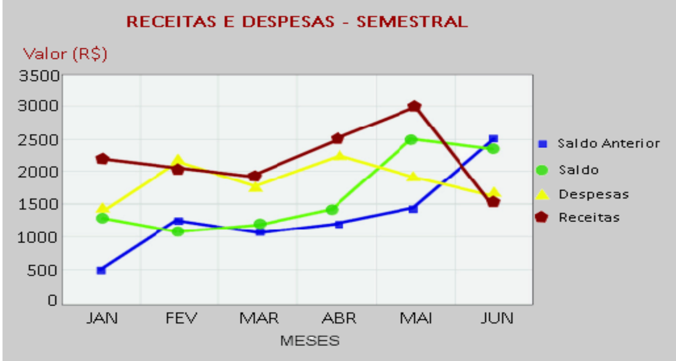
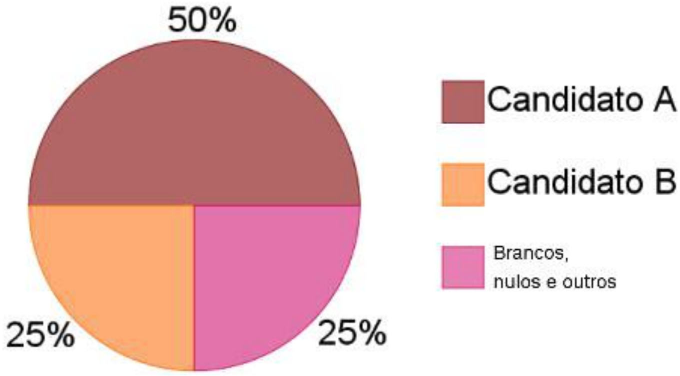


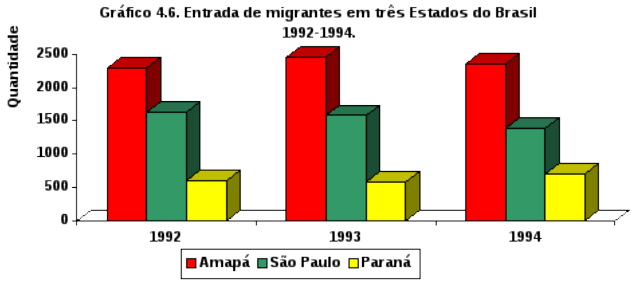
Gráfico de setores

No gráfico de setores, a frequência de cada dado estatístico é representada por uma "fatia" do círculo. Essa fatia é denominada setor circular e sua área é proporcional à frequência. Este gráfico é usado quando se deseja relacionar os dados estatísticos entre si ou com o todo. Nesse tipo de gráfico, a soma das porcentagens correspondentes a cada setor deve ser 100%.



Gráficos de múltiplas entradas

Um gráfico de múltiplas entradas pode ser de linha, de colunas, de barras, entre outros tipos. Nele, representa-se uma mesma característica, estudada para duas ou mais amostras, facilitando a comparação entre elas.

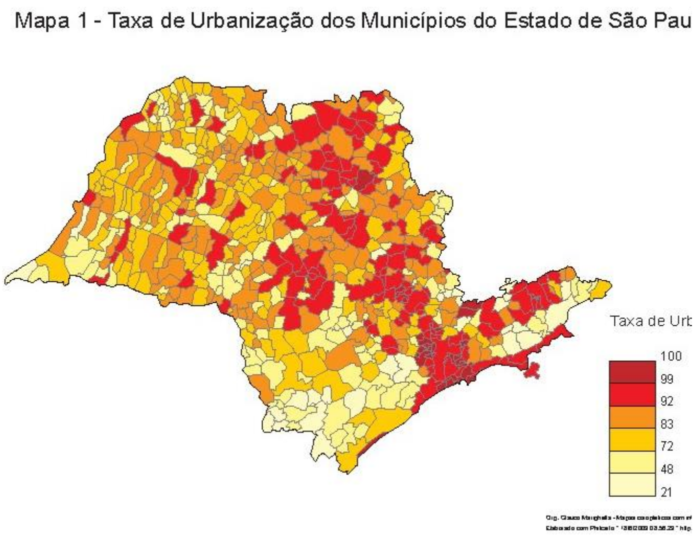


Pictogramas

O pictograma é uma forma de representação gráfica em que se utilizam figuras relacionadas ao assunto em estudo para representar quantidades. Em alguns casos, as frequências são representadas pela mesma figura em tamanhos ou comprimentos proporcionais a essas frequências (por exemplo, o pictograma das espécies de baleias acima); às vezes, escolhe-se um ícone para representar determinada frequência. Esse tipo de gráfico é muito usado em revistas e jornais por sua forma atraente e sugestiva.

Cartograma

O cartograma é um mapa em que se representa, por meio de linhas e figuras, a ocorrência ou a intensidade de fenômenos como clima, distribuição de população, vegetação, conservação de solo etc.
Esse gráfico é empregado quando o objetivo é representar os dados estatísticos diretamente relacionados com áreas geográficas ou políticas.



Infográfico

O infográfico é usado para apresentar informações de maneira mais dinâmica, utilizando gráficos, textos, ilustrações, fotos, mapas etc. Atualmente, os infográficos estão bastante presentes em jornais, revistas e na internet.

Frequência absoluta e frequência relativa

O número de vezes que um dado se repete em uma pesquisa é chamado de **frequência absoluta**. A razão entre o número de pessoas de um dos grupos e número total de pessoas da amostra é denominada **frequência relativa**.
Obs.: A frequência relativa geralmente é expressa em forma de porcentagem.
Exemplo: Às pessoas presentes em um evento automobilístico foi feita a seguinte pergunta: Qual a sua marca de carro preferida?
Construindo uma tabela para melhor dispor os dados:

Marcas	Frequência Absoluta (FA)	Frequência Relativa (FR)
Ford	4	16,7%
Fiat	3	12,5%
GM	6	25%
Nissan	1	4,2%
Peugeot	3	12,5%
Renault	2	8,3%
Volks	5	20,8%
Total	24	100%

Frequência absoluta: quantas vezes cada marca de automóvel foi citada.

Frequência relativa: é dada em porcentagem. A marca Ford tem frequência relativa 4 em 24 ou 4/24 ou ~0,166 ou 16,66% ou 16,7%.

Medidas estatísticas

Como vimos, o estudo de distribuição de frequência facilita a apresentação do grupo de valores que uma variável pode assumir. Mas, às vezes precisamos resumir ainda mais um conjunto de dados para expressar determinada característica da população pesquisada. Para isso, usamos algumas medidas estatísticas.

A seguir, vamos estudar algumas dessas medidas estatísticas: média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana.

Média aritmética

Exemplo: André, professor de Matemática, determinou que a nota do bimestre será calculada da seguinte maneira: primeiro deve-se adicionar as notas das 4 atividades solicitadas: trabalho individual, trabalho em grupo, prova mensal e prova bimestral; depois, deve-se dividir a soma obtida por 4.

Esse cálculo determinado pelo professor André corresponde à média aritmética das notas das atividades desenvolvidas durante o bimestre.

Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, devemos adicionar esses números e dividir a soma obtida pela quantidade de números que foram adicionados.

Média ponderada

Para obter a média aritmética ponderada de dois ou mais números, multiplicamos cada número por seu respectivo peso, depois adicionamos todos os produtos e, em seguida, dividimos a soma encontrada pela soma dos pesos considerados.

Mediana

A **mediana** de um conjunto de dados cujos valores estão ordenados do menor para o maior ou do maior para o menor é:

- o valor que ocupa a posição central, quando há um número ímpar de valores;
- a média aritmética dos valores que ocupam as posições centrais, quando há uma quantidade par de valores.

Moda

Moda é o valor que mais aparece em uma distribuição de dados.

Noções de probabilidade

Na Teoria das Probabilidades, estuda-se as leis que regem os fenômenos que dependem do acaso, ou seja, fenômenos cujos resultados não podem ser previstos. Nesse caso, interessam a essa teoria os experimentos aleatórios, que são aqueles cujo resultado é imprevisível mesmo que sejam repetidos nas mesmas condições tantas vezes quanto quisermos.

São exemplos de experimentos aleatórios: lançar um dado e observar a pontuação obtida; lançar duas moedas; retirar uma carta do baralho.

O espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

O número adquirido por Geórgia forma um evento dessa experiência aleatória. Do mesmo modo que os 5 números adquiridos por Afonso também formam um evento.

Qualquer conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de evento.

Definidos o espaço amostral e o evento correspondente ao experimento aleatório, podemos determinar a probabilidade. Probabilidade é a medida da chance de um evento acontecer.

Para calcular a probabilidade, basta dividir o número de elementos do evento correspondente ao experimento aleatório pelo número de elementos do espaço amostral. ($P = \frac{\textit{NÚMERO DE ELEMENTOS DO EVENTO}}{\textit{NÚMERO DE ELEMENTOS DO ESPAÇO AMOSTRAL}}$)

Probabilidade de ocorrência de um evento. Portanto, temos que:

- a probabilidade de Geórgia ser sorteada é ou 0,001 ou 0,1%
- a probabilidade de Afonso ser sorteado é ou 0,005 ou 0,5%

OBSERVAÇÕES

A probabilidade é um número entre 0 e 1.

Quando a probabilidade é zero, dizemos que o evento é impossível.

Quando a probabilidade é 1 ou 100%, dizemos que o evento é certo.

Exercícios propostos

1. Sortear uma bola roxa de uma urna que só tem bolas roxas é um experimento aleatório? Por quê?
2. Em uma urna, há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?
3. A professora vai sortear, ao acaso, um aluno entre os 30 alunos da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual será a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino?
4. Considerando o lançamento de dois dados, determine:

a. a probabilidade de a soma das faces obtidas ser 8;

b. a probabilidade de a soma das faces ser um número par;

c. a probabilidade de a soma das faces ser maior que 10.

5. Qual é a probabilidade de sair duas caras, após o lançamento simultâneo de duas moedas não viciadas?
6. A tabela abaixo mostra a idade das pessoas que se associaram a uma biblioteca pública durante o mês de julho.

Idade em anos	14	15	16	17	18	19	20
Número de pessoas	6	12	15	34	23	12	4

a. Calcule a idade média dessas pessoas.
b. Determine a idade modal e a idade mediana.
c. Construa um gráfico de colunas para essa situação.

Capítulo 5 – Proporcionalidade
Razão e Proporção

Definições:

A razão entre dois números a e b, com b≠0, nessa ordem, é o quociente $\frac{a}{b}$. A **razão** estabelece uma **comparação entre duas grandezas**, sendo o quociente entre dois números.
Já a **proporção** é determinada pela **igualdade entre duas razões**, ou ainda, quando duas razões possuem o mesmo resultado. Dizemos que quatro números a, b, c e d, não nulos, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Observação: o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, sendo a e d os extremos e b e c os meios, temos: a . d = b . c.

Exemplos:

1º caso: Exemplo para razão
Qual a razão entre 40 e 20?

$$\frac{40}{20} = 2$$

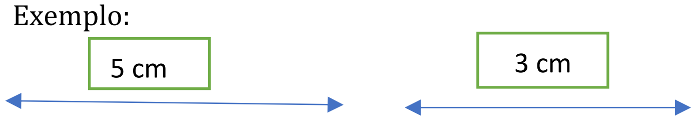
Obs.: Em uma fração, o numerador é o número acima e o denominador, o de baixo.

2º caso: Exemplo para proporção
Qual o valor de x na proporção abaixo?

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{x}$$

3 . 12 = x
x = 36

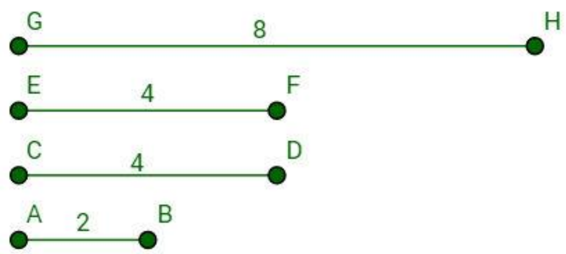
Razão e proporção entre segmentos
A razão entre dois segmentos é a razão entre suas medidas tomadas em uma mesma unidade.
Exemplo:



Qual a razão entre os segmentos apresentados, respectivamente?

$$\frac{5}{3}$$

Proporção entre segmentos: Dizemos que quatro segmentos de reta são proporcionais quando a razão entre as medidas de dois deles forem iguais à razão entre as medidas dos dois restantes.



De acordo com a imagem acima, podemos garantir que, os segmentos AB, CD, EF e GH são proporcionais pois:

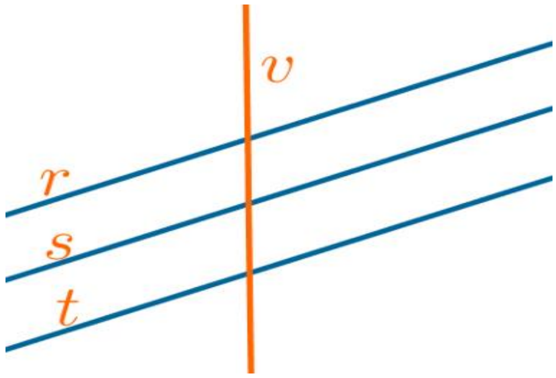
$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = 0{,}5$

A proporcionalidade entre segmentos é muito usada em Geometria e na vida prática. Como exemplo prático está o caso de ampliação de uma fotografia, para que ela permaneça sem deformação, o tamanho dos lados da foto ampliada deve ser proporcional ao tamanho dos lados da foto original.

Feixe de Paralelas

Um conjunto de três ou mais retas, de um mesmo plano, que consideradas duas a duas são sempre paralelas, é chamado de **feixe de paralelas**.

Uma reta que corta um feixe de paralelas é chamada de **transversal**.



Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/matematica/retas-paralelas-cortadas-por-uma-transversal.htm

Dessa caracterização, tiramos uma propriedade:

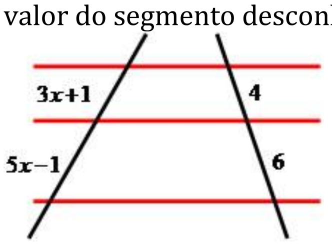
Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, então esse feixe determina segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Teorema de Tales

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

Exemplo:

Aplicaremos o Teorema de Tales para encontrar o valor do segmento desconhecido:



$$\frac{3x+1}{5x-1}=\frac{4}{6}$$
$$20x-4=18x+6$$
$$20x-18x=6+4$$
$$2x=10$$
$$x=5$$

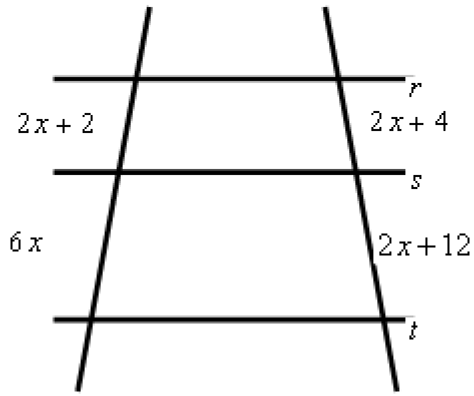
Consequências do Teorema de Tales

1º consequência: Quando uma reta paralela a um lado de um triângulo intercepta os outros lados em dois pontos distintos, ela determina segmentos proporcionais sobre esses lados.

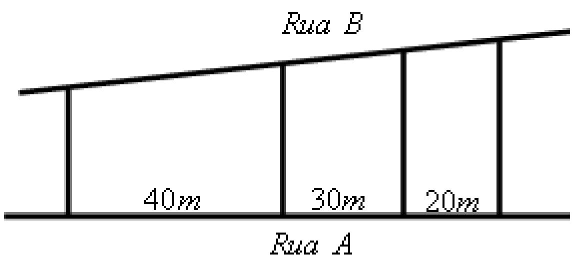
2º consequência: A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto a esse ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes a esses segmentos.

Exercícios Propostos

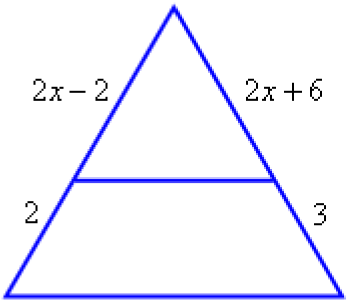
1. Se (3, x, 14, ...) e (6, 8, y, ...) forem grandezas diretamente proporcionais, então o valor de x + y é:
2. Calcular x e y sabendo-se que (1, 2, x, ...) e (12, y, 4, ...) são grandezas inversamente proporcionais.
3. Dividir o número 160 em três partes diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.
4. Repartir uma herança de R$ 495.000,00 entre três pessoas na razão direta do número de filhos e na razão inversa das idades de cada uma delas. Sabe-se que a 1ª pessoa tem 30 anos e 2 filhos, a 2ª pessoa tem 36 anos e 3 filhos e a 3ª pessoa 48 anos e 6 filhos.
5. Dois números estão na razão de 2 para 3. Acrescentando-se 2 a cada um, as somas estão na razão de 3 para 5. Então, o produto dos dois números é:
6. Observe a figura r // s // t. Calcule o valor de x de acordo com o Teorema de Tales.



7. **(Fuvest-SP)** Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?



8. No triângulo ABC a seguir, o segmento DE é paralelo ao segmento BC. Determine o valor de x aplicando a proporcionalidade entre segmentos paralelos cortados por segmentos transversais.



Capítulo 6 – Semelhança

Semelhança de Figuras

Figuras Semelhante

Quando uma imagem é projetada em um televisor ou na tela de cinema, por exemplo, ela geralmente tem tamanho diferente do tamanho da imagem original, mas mantém a mesma forma. Por isso, dizemos que a figura que aparece na tela é semelhante à original.

Figuras semelhantes são aquelas que têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.

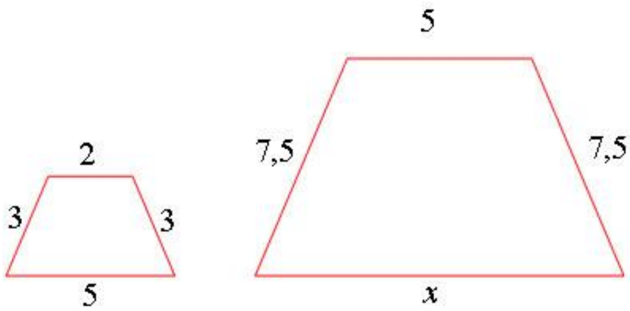
Figuras congruentes (ou seja, iguais) também podem ser denominadas semelhantes.

Polígonos Semelhantes

Dois polígonos são semelhantes quando seus lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes. Ou seja, se atenderem as seguintes condições:

- Ângulos correspondentes congruentes.
- Lados correspondentes proporcionais.
- Possuem razão de semelhança igual entre dois lados correspondentes.

Exemplo: Determine o valor da medida x, sabendo que os trapézios a seguir são semelhantes.



1º passo para resolução é descobrir qual a razão entre os segmentos proporcionais correspondentes.

7,5 / 3 = 2,5 e 5 / 2 = 2,5

O coeficiente de ampliação dos trapézios equivale à constante ***k = 2,5***. Então:

x / 5 = 2,5

x = 2,5 * 5

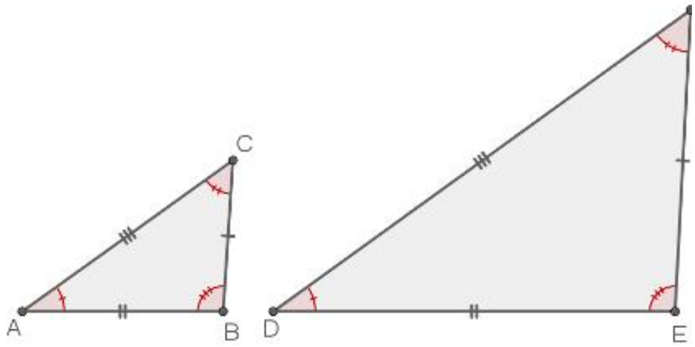
x = 12,5

O valor de x corresponde a 12,5 unidades.

Obs.: Para verificar se dois polígonos são semelhantes, basta comparar a medida dos ângulos e a dos lados correspondentes: os ângulos correspondentes devem ser congruentes e as medidas dos lados devem ser proporcionais. Apenas uma das condições não é suficiente para garantir a semelhança entre polígonos.

Triângulos Semelhantes

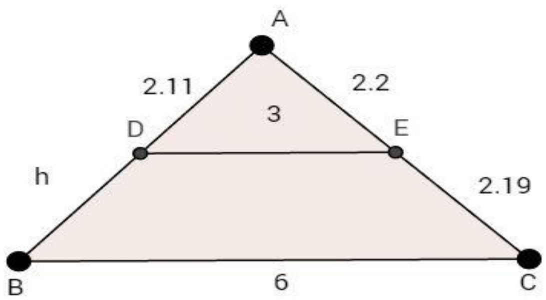
Para serem semelhantes, dois triângulos, assim como todos os polígonos, devem ter os lados correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.



Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-semelhanca-triangulos.htm#

Teorema fundamental da semelhança de triângulos: Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Exemplo: Sabendo que DE é paralelo a BC, descubra o valor de "h":



Em decorrência de DE ser paralelo à BC, pelo teorema fundamental da semelhança, pode-se escrever o seguinte:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{2,11}{h+2,11} = \frac{3}{6}$$

$$2,11 \cdot 6 = 3 \cdot (h+2,11)$$

$$12,66 = 3h + 6,33$$

$$3h = 12,66 - 6,33$$

$$3h = 6,33$$

$$h = \frac{6,33}{3}$$

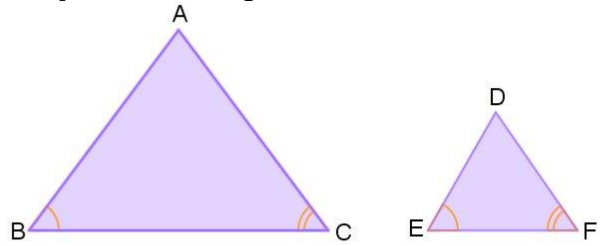
$$h = 2,11$$

Casos de semelhança de triângulos

Como os triângulos são polígonos simples, podemos analisar se dois triângulos são semelhantes sem precisar analisar se eles possuem todos os ângulos correspondentes congruentes e todos os lados correspondentes proporcionais.

Vamos estudar os três casos de semelhança de triângulos.

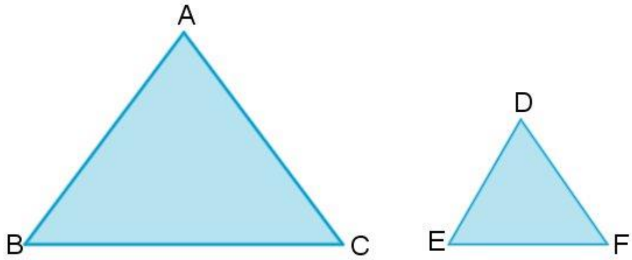
1º Caso - A.A. (Ângulo – Ângulo): Dois ângulos correspondentes congruentes.



Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/

B≡E e C≡F⟺△ABC~△DEF

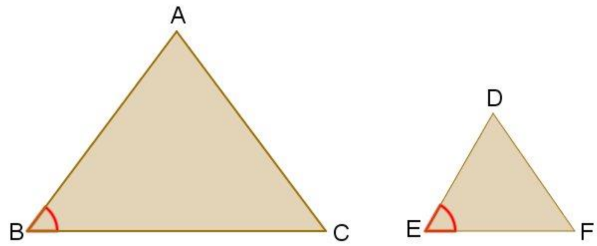
2º Caso – L.L.L (Lado – lado –lado): Os três lados correspondentes são proporcionais.



Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/

AB/DE=BC/EF=AC/DF⟺△ABC~△DEF

3º caso – L.A.L (Lado – ângulo – lado): dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos entre eles congruentes.



Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/

{AB/DE=BC/EF B≡E⟺△ABC~△DEF

Exercícios Propostos

1. Dois quadrados possuem, respectivamente, lados medindo 12 centímetros e 24 centímetros. Qual é a razão entre a área do quadrado menor e a área do quadrado maior?

a) 0,25
b) 0,5
c) 2
d) 4
e) 1

2. Dois retângulos são semelhantes. O primeiro deles mede 10 centímetros de largura por 8 centímetros de comprimento. O segundo retângulo mede 20 centímetros de largura por 16 centímetros

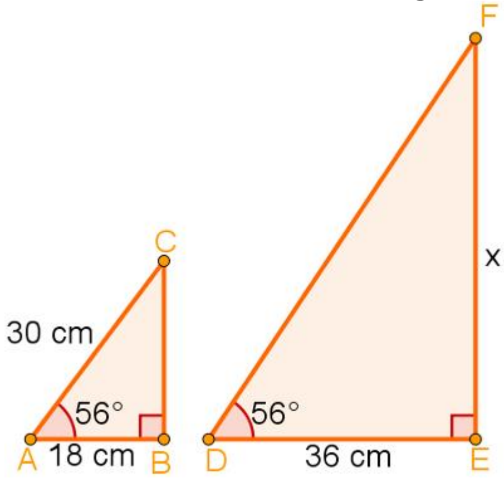
de comprimento. Qual é a razão de semelhança entre a área do polígono maior e a área do polígono menor?
a) 0,25
b) 0,5
c) 2
d) 4
e) 8

3. Qual é a razão de semelhança entre dois polígonos cujas áreas medem 25 cm^2 e 36 cm^2, respectivamente?
a) 0,43
b) 0,53
c) 0,63
d) 0,73
e) 0,83

4. Dados dois polígonos semelhantes, determine a área do menor sabendo que a área do maior é igual a 64 cm^2 e que a razão de semelhança entre eles é de 0,5.
a) 8 cm^2
b) 16 cm^2
c) 20 cm^2
d) 40 cm^2
e) 256 cm^2

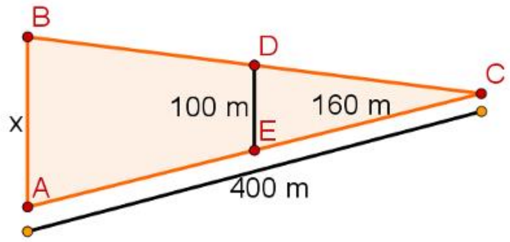
5. Existem alguns procedimentos que podem ser usados para descobrir se dois triângulos são semelhantes sem ter de analisar a proporcionalidade de todos os lados e, ao mesmo tempo, as medidas de todos os ângulos desses triângulos. A respeito desses casos, assinale a alternativa correta:
a) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham três ângulos correspondentes congruentes.
b) Para que dois triângulos sejam semelhantes, basta que eles tenham dois lados proporcionais e um ângulo congruente, em qualquer ordem.
c) Para que dois triângulos sejam congruentes, basta que eles tenham os três lados correspondentes com medidas proporcionais.
d) Dois triângulos que possuem dois lados correspondentes proporcionais não serão semelhantes em qualquer hipótese.
e) Dois triângulos que possuem apenas dois ângulos correspondentes congruentes não podem ser considerados semelhantes.

6. Qual o valor de x nos triângulos a seguir?



a) 48 cm
b) 49 cm
c) 50 cm
d) 24 cm
e) 20 cm

7. Na imagem a seguir, é possível perceber dois triângulos que compartilham parte de dois lados. Sabendo que os segmentos BA e DE são paralelos, qual a medida de x?



a) 210 m
b) 220 m
c) 230 m
d) 240 m
e) 250 m

8. Para descobrir a altura de um prédio, Luiz mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luiz, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?
a) 50 metros
b) 56 metros
c) 60 metros
d) 66 metros
e) 70 metros

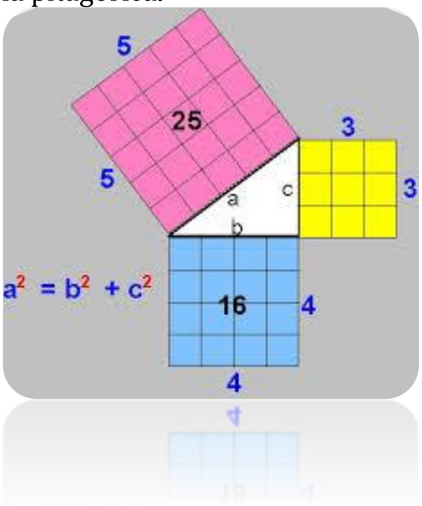
Capítulo 7 – Estudo dos Triângulos Retângulos

Triângulos Retângulo

Pitágoras foi um filósofo grego que nasceu na Ilha de Samos, provavelmente em 570 a.C., cerca de cinquenta anos depois do nascimento de Tales de Mileto.

Filho de um rico comerciante, pôde viajar pelo Egito, pela Babilônia, e talvez tenha ido até a Índia.

Ao voltar para a Grécia, fixou-se em sua terra natal, mas, descontente com as arbitrariedades do governo de Samos, transferiu-se para Croton, uma colônia grega situada na Itália, onde ele fundou a escola pitagórica.



Nessa escola, estudavam-se Religião, Filosofia, Política, Música, Astronomia e Matemática. O ensino era dividido em duas categorias: os alunos dos três primeiros anos eram chamados *ouvintes*, e os dos anos seguintes, *matemáticos*. Somente aos últimos eram revelados os segredos da Matemática. Aliás, a origem da palavra **matemática** (que significa “o aprendizado da arte, da ciência”) é atribuída a Pitágoras.

O lema da escola era “Tudo é número”. Assim, seus alunos procuravam explicar por meio dos números tudo o que existe na natureza.

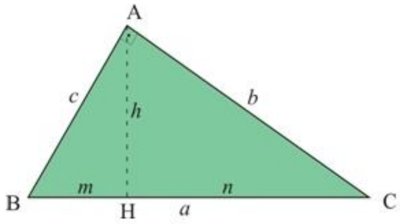
Os pitagóricos formaram uma sociedade secreta cujo emblema era um pentagrama. Observe que essa figura é formada pelas diagonais de um pentágono regular.

A única aspiração dos pitagóricos era o conhecimento. Seus estudos trouxeram grandes contribuições para a Matemática, principalmente na Geometria; a maior delas foi, sem dúvida, o conhecido teorema de Pitágoras.

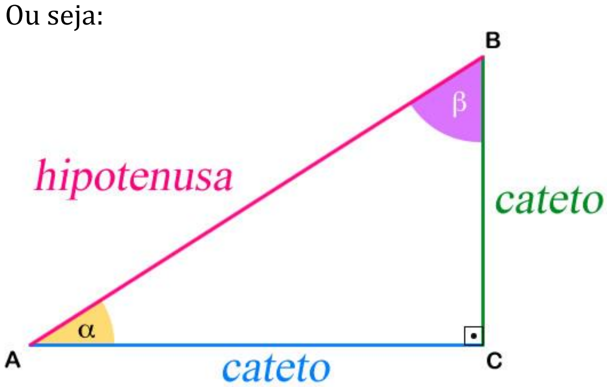
Mesmo depois da morte de Pitágoras, ocorrida por volta de 500 a.C., a sociedade dos pitagóricos continuou a existir por mais de quatro séculos.

Elementos de um triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo é composto por dois catetos e uma hipotenusa.



Onde:
a: hipotenusa;
b e c: catetos;
h: altura relativa à hipotenusa;
m e n: projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.
Ou seja:



Em relação aos ângulos, sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, nos triângulos retângulos, a soma da medida dos dois ângulos agudos de cada triângulo é 90°, ou seja, eles são complementares.

Teorema de Pitágoras

Sobre cada lado do triângulo retângulo abaixo, desenhou-se uma figura quadrada com lados que coincidem com os respectivos lados do triângulo. Cada figura quadrada teve sua superfície dividida em quadradinhos, todos congruentes entre si. Considerando como unidade de medida a área de cada quadradinho, nota-se que a área do quadrado maior (azul) é igual à soma das áreas dos quadrados menores:

$$25 = 16 + 9$$

Em todo triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados da figura e, consequentemente, as medidas dos respectivos lados do triângulo retângulo.

Como

$$25 = 16 + 9$$

, temos

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Essa relação existente entre os quadrados das medidas dos lados desse triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Formalizando, tem-se que: Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Aplicações do Teorema

1ª aplicação: Relação entre a medida da diagonal e a medida o lado de um quadrado: Considere um quadrado *ABCD*, de lado l e diagonal *d*.
Observe que a diagonal divide o quadrado em dois triângulos retângulos congruentes.
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo formado a partir da diagonal, temos:

$d^2 = l^2 + l^2$

$d^2 = 2l^2$

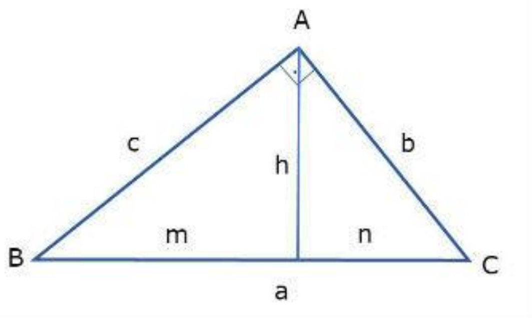
$d = \sqrt{2l^2}$

$d = l\sqrt{2}$.

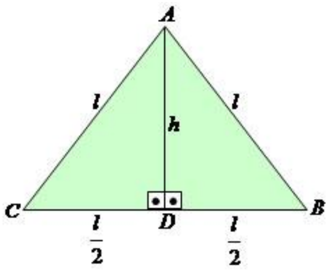
Portanto, em um quadrado de lado l , a medida da diagonal é $l\sqrt{2}$.

2ª aplicação: Relação entre a medida da altura e a medida do lado de um triângulo equilátero:
Considere o triângulo equilátero *ABC* de lado l e

Disponível em https://mundoeducacao.bol.



altura *h.*



Disponível em: https://mundoeducacao.bol 1

Observe que a altura h divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ACD*, temos:

$l^2 = h^2 + (l/2)^2$

$l^2 = h^2 + l^2/4$

$h^2 = l^2 - l^2/4$

$h^2 = 3l^2/4$

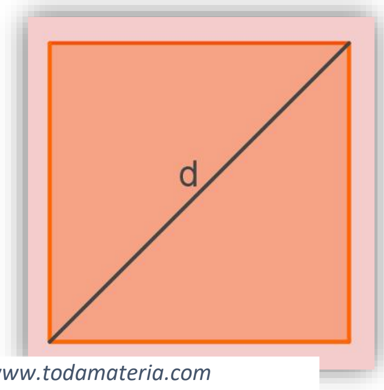
$h = \sqrt{3l^2/4}$

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Portanto, em um triângulo equilátero de lado l , a altura mede $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Relações métricas em um triângulo retângulo

Observe o triângulo *ABC*, ao lado, com hipotenusa de medida *a* e catetos de medidas *b* e *c*. Traçando a altura relativa "h" à hipotenusa, temos:

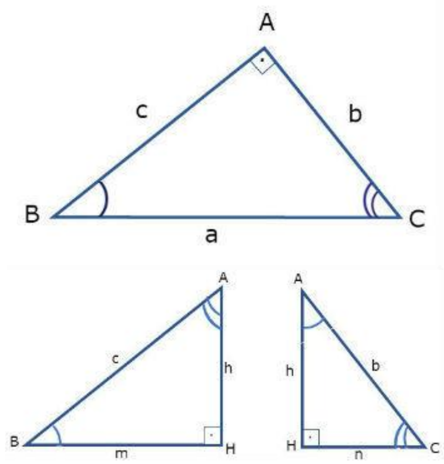


Disponível em: https://www.todamateria.com

- BH é a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa; vamos considerar que BH = m.
- CH é a projeção do cateto AC sobre a hipotenusa; vamos considerar que AC = n .

Considerando os triângulos retângulos *ABH* e *ACH* obtidos ao traçar a altura, podemos estabelecer relações entre as medidas de seus lados e identificar alguns pares de triângulos semelhantes.

Para determinar as relações métricas, vamos utilizar os critérios de semelhança de triângulos. Considere os triângulos semelhantes ABC, HBA e HAC, representados nas imagens:



Como os triângulos ABC e HBA são semelhantes, temos as seguintes proporções:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a.m$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a.m$$

Usando que $\Delta ABC \sim \Delta HAC$ encontramos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a.n$$

Da semelhança entre os triângulos HBA e HAC encontramos a proporção:

$$\frac{h}{n}=\frac{m}{h}\Rightarrow h^2=m.n$$

Temos ainda que a soma das projeções m e n é igual a hipotenusa, ou seja:

$$a=m+n$$

Exercícios Propostos

01 (FEI-SP) Em um triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a diferença entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa é 7 cm. A hipotenusa desse triângulo mede:

a. 10 cm
b. 15 cm
c. 20 cm
d. 25 cm
e. 30 cm

02 (UEL-PR) As medidas, em centímetro, dos três lados de um triângulo retângulo são expressas por (x – 2), *x* e (x + 2). A medida, em centímetro, da hipotenusa desse triângulo é:

a. 5
b. 8
c. 10
d. 12
e. 14

03 (FEI-SP) Se em um triângulo os lados medem 9, 12 e 15 cm, então a altura relativa ao maior lado mede:

a. 8,0 cm
b. 7,2 cm
c. 6,0 cm
d. 5,6 cm
e. 4,3 cm

04 (Fuvest-SP) Um trapézio retângulo tem bases 5 e 2 e altura 4. O perímetro desse trapézio é:

a. 13
b. 14
c. 15
d. 16
e. 17

Capítulo 8 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Já vimos que os matemáticos estabeleceram importantes relações entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo.

O ramo da Matemática que estuda essas relações é chamado de Trigonometria. A palavra “trigonometria”, de origem grega, significa “medida das partes de um triângulo”. Sabe-se que a Trigonometria era usada para determinar distâncias que não podiam ser obtidas com instrumentos de medidas, como, por exemplo, a distância entre os planetas.

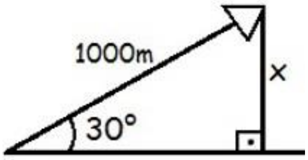
Neste capítulo, estudaremos três razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.

Seno de um ângulo agudo

Em todo triângulo retângulo, denominamos seno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa. Matematicamente, temos:

Senα $=\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$

Exemplo: (UFPI) Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1.000 metros, a altura atingida pelo avião, em metros, é:



Utilizando a fórmula para o cálculo do seno, temos:

$$\textbf{sen } 30° = \frac{x}{1000}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{x}{1000}$$

$$2x = 1000$$

$$x=\frac{1000}{2}$$

$$x = 500\ m$$

Portanto, o avião atingiu 500 m de altura.

Cosseno de um ângulo agudo

Em todo triângulo retângulo, denominamos cosseno de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa. Matematicamente, temos:

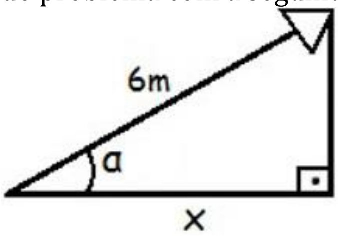
Cosα $=\frac{Cateto\ Adjacente}{Hipotenusa}$

Exemplo: (CEFET-MG - adaptado) Uma escada que mede 6m está apoiada em uma parede. Sabendo-se que ela forma com o solo um ângulo α e que

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

A distância de seu ponto de apoio no solo até a parede, em metros, é:

Podemos ilustrar a situação descrita pelo enunciado do problema com a seguinte figura:



Utilizando a fórmula para o cálculo do cosseno, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{6}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{x}{6}$$

$$3x = 6.\sqrt{5}$$

$$x = \frac{6.\sqrt{5}}{3}$$

$$x = 2\sqrt{5}$$

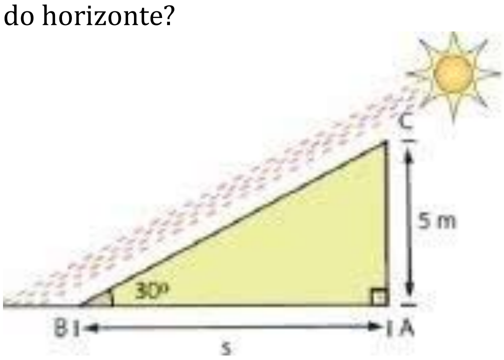
A distância do ponto de apoio até a parede é de aproximadamente $2\sqrt{5}$ metros.

Tangente de um ângulo agudo

Em todo triângulo retângulo, denominamos tangente de um ângulo agudo a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo. Matematicamente, temos:

$$Tg\alpha = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}$$

Exemplo: Qual o comprimento da sombra de uma árvore de 5m de altura quando o sol está a 30° acima do horizonte?



Tg B = AC / AB = 5/s

Uma vez que B = 30° temos que a:

Tg B = 30° = $\sqrt{3}/3$ = 0,577

Logo,

0,577 = 5/s

s = 5/0,577

s = 8,67

Tabela das Razões trigonométricas

As razões trigonométricas são aplicadas na resolução de uma grande variedade de problemas.

As primeiras tabelas trigonométricas foram feitas pelo astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.), a quem se atribui estabelecimento das bases da Trigonometria.

Mais tarde, Cláudio Ptolomeu (85-165 d.C.), astrônomo, matemático e geógrafo grego, ampliou o trabalho de Hiparco com a obra *Sintaxe matemática*, considerada a mais influente e significativa obra sobre Trigonometria da Antiguidade. É conhecida também como *Almagesto*, que em árabe significa “o maior”.

A seguir, tem-se uma tabela dos valores aproximados do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 1° a 89°.

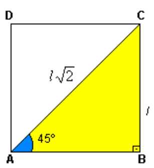
Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,017 5	0,999 8	0,017 5
2°	0,034 9	0,999 4	0,034 9
3°	0,052 3	0,998 6	0,052 4
4°	0,069 8	0,997 6	0,069 9
5°	0,087 2	0,996 2	0,087 5
6°	0,104 5	0,994 5	0,105 1
7°	0,121 9	0,992 5	0,122 8
8°	0,139 2	0,990 3	0,140 5
9°	0,156 4	0,987 7	0,158 4
10°	0,173 6	0,984 8	0,176 3
11°	0,190 8	0,981 6	0,194 4
12°	0,207 9	0,978 1	0,212 6
13°	0,225 0	0,974 4	0,230 9
14°	0,241 9	0,970 3	0.249 3
15°	0,258 8	0,965 9	0,267 9
16°	0,275 6	0,961 3	0,286 7
17°	0,292 4	0,956 3	0,305 7
18°	0,309 0	0,951 1	0,324 9
19°	0,325 6	0,945 5	0,344 3
20°	0,342 0	0,939 7	0,364 0
21°	0,358 4	0,933 6	0,383 9
22°	0,374 6	0,927 2	0,404 0
23°	0,390 7	0,920 5	0,424 5
24°	0,406 7	0,913 5	0,445 2
25°	0,422 6	0,906 3	0,466 3
26°	0,438 4	0,898 8	0,487 7
27°	0,454 0	0,891 0	0,509 5
28°	0,469 5	0,882 9	0,531 7
29°	0,484 8	0,874 6	0,554 3
30°	0,500 0	0,866 0	0,577 4
31°	0,515 0	0,857 2	0,600 9
32°	0,529 9	0,848 0	0,624 9
33°	0,544 6	0,838 7	0,649 4
34°	0,559 2	0,829 0	0,674 5
35°	0,573 6	0,819 2	0,700 2
36°	0,587 8	0,809 0	0,726 5
37°	0,601 8	0,798 6	0,753 6
38°	0,615 7	0,788 0	0,781 3
39°	0,629 3	0,777 1	0,809 8
40°	0,642 8	0,766 0	0,839 1
41°	0,656 1	0,754 7	0,869 3
42°	0,669 1	0,743 1	0,900 4
43°	0,682 0	0,731 4	0,932 5
44°	0,694 7	0,719 3	0,965 7
45°	0,707 1	0,707 1	1.000 0

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
46°	0,719 3	0,694 7	1,035 5
47°	0,731 4	0,682 0	1,072 4
48°	0,743 1	0,669 1	1,110 6
49°	0,754 7	0,656 1	1,150 4
50°	0,766 0	0,642 8	1,191 8
51°	0,777 1	0,629 3	1,234 9
52°	0,788 0	0,615 7	1,279 9
53°	0,798 6	0,601 8	1,327 0
54°	0,809 0	0,587 8	1,376 4
55°	0,819 2	0,573 6	1,428 1
56°	0,829 0	0,559 2	1,482 6
57°	0,838 7	0,544 6	1,539 9
58°	0,848 0	0,529 9	1,600 3
59°	0,857 2	0,515 0	1.664 3
60°	0,866 0	0,500 0	1,732 1
61°	0,874 6	0,484 8	1,804 0
62°	0,882 9	0,469 5	1,880 7
63°	0,891 0	0,454 0	1,962 6
64°	0,898 8	0,438 4	2,050 3
65°	0,906 3	0,422 6	2,144 5
66°	0,913 5	0,406 7	2,246 0
67°	0,920 5	0,390 7	2,355 9
68°	0,927 2	0,374 6	2,475 1
69°	0,933 6	0,358 4	2,605 1
70°	0,939 7	0,342 0	2,747 5
71°	0,945 5	0,325 6	2,904 2
72°	0,951 1	0,309 0	3,077 7
73°	0,956 3	0,292 4	3,270 9
74°	0,961 3	0,275 6	3,487 4
75°	0,965 9	0,258 8	3,732 1
76°	0,970 3	0,241 9	4,010 8
77°	0,974 4	0,225 0	4,331 5
78°	0,978 1	0,207 9	4,704 6
79°	0,981 6	0,190 8	5,144 6
80°	0,984 8	0,173 6	5,671 3
81°	0,987 7	0,156 4	6,313 8
82°	0,990 3	0,139 2	7,115 4
83°	0,992 5	0,121 9	8,144 3
84°	0,994 5	0,104 5	9,514 4
85°	0,996 2	0,087 2	11,430 1
86°	0,997 6	0,069 8	14,300 7
87°	0,998 6	0,052 3	19,081 1
88°	0,999 4	0,034 9	28,636 3
89°	0,999 8	0,017 5	57,290 0

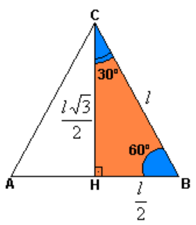
Disponível em: http://mileidestonsis.blogspot.com/2011/04/tabelatrigonometrica

Razões trigonométricas nos ângulos notáveis

Considere as figuras:



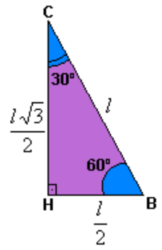
Quadrado de lado *l e* diagonal $l\sqrt{2}$



Triângulo equilátero de lado *l* e altura $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

Seno, cosseno e tangente de 30º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos de 30º, temos:



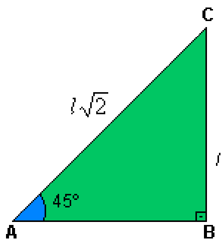
$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{l}.2}{2.\cancel{l}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Seno, cosseno e tangente de 45º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 45º, temos:



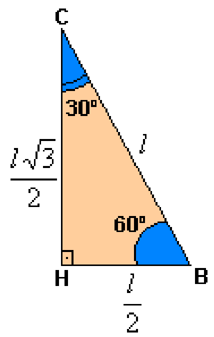
$$\text{sen } 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\cancel{l}.1}{\cancel{l}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}} = 1$$

Seno, cosseno e tangente de 60º

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente para um ângulo de 60º, temos:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{\cancel{l}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{l}} = \frac{1}{2}$$

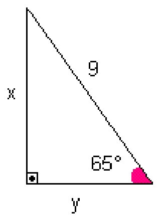
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{\cancel{l}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{l}} = \sqrt{3}$$

Resumindo:

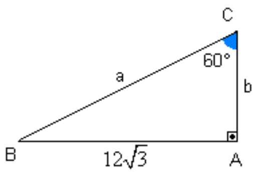
x	**sen** *x*	**cos** *x*	**tg** *x*
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercícios Propostos

1. No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: sen 65° = 0,91; cos 65° = 0,42 ; tg 65° = 2,14)

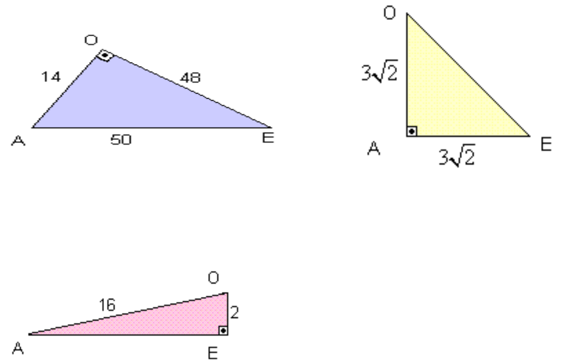


2. Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. (Sen 60° = 0,866)

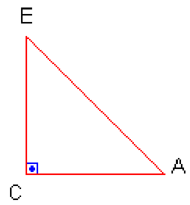


3. Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

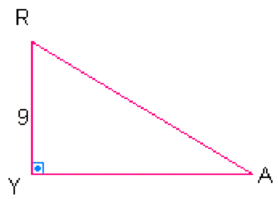
4. Nos triângulos das figuras abaixo, calcule tg Â, tg Ê, tg Ô:



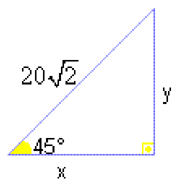
5. Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de tg Â e tg Ê?

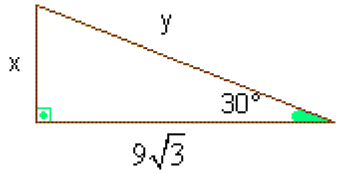


6. Encontre a medida RA sabendo que tg Â = 3.



7. Encontre **x** e **y**:





8. O valor do seno de um ângulo varia de acordo com as medidas dos lados do triângulo, ou de acordo com a medida do ângulo?

9. Construa em seu caderno um triângulo retângulo com um dos ângulos internos medindo 45°. Depois, com uma régua, determine a medida aproximada, em centímetro, dos catetos e da hipotenusa.

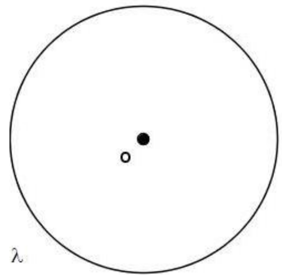
a. Qual é o valor aproximado da razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45° e a medida da hipotenusa desse triângulo?
b. Qual é o valor aproximado de cos 45°?
c. Qual é o valor da razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo de 45°?
d. Qual é o valor de tg 45°?

Capítulo 9 – Circunferência e círculo

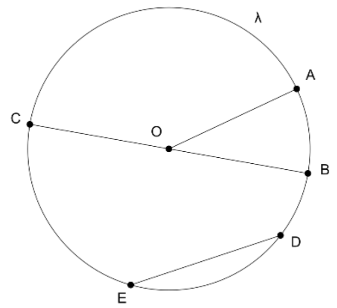
Circunferência e arco de circunferência

Circunferência: circunferência é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano, chamado de centro.

Na circunferência abaixo, o centro é o ponto *O*.

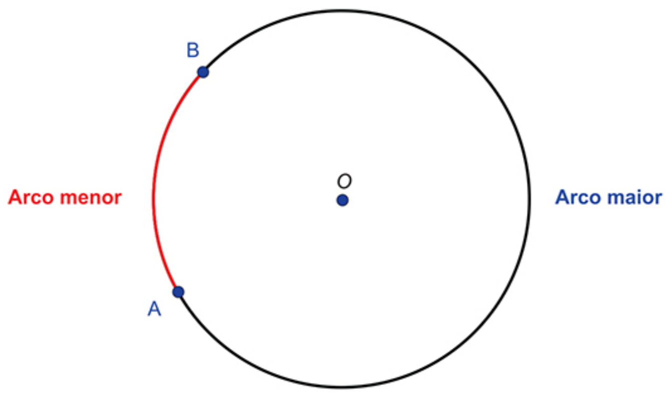


Considere a circunferência a seguir e alguns de seus elementos.



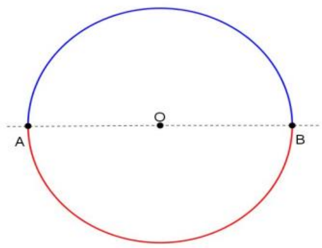
Disponível em: https://pt.wikipedia.org/ 1

O é o centro.
Raio: segmento de reta que possui uma extremidade no centro e a outra em um ponto qualquer da circunferência.
Corda: segmento de reta cujas extremidades são dois pontos quaisquer da circunferência.
Diâmetro: corda que passa pelo centro da circunferência.
Obs.: dois pontos distintos de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de arco.



Disponível em: http://www.universiaenem.com.br

Obs.: Quando os extremos *A* e *B* coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de **semicircunferência**.



Comprimento de uma circunferência

Para calcular o comprimento de qualquer circunferência, precisamos ter a medida do **raio** (**r**). Sabendo o valor do raio, o comprimento da circunferência é dado pelo produto do raio e 2 por **π** (número irracional cujo valor *aproximado* é 3,14). Seja **C** o **comprimento da circunferência**, temos a seguinte fórmula:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Como o diâmetro é igual a medida do raio multiplicado por dois, temos ainda que o comprimento do raio pode ser dado da seguinte maneira. O **comprimento da circunferência** (considere d = diâmetro):

$$C = \pi \cdot d$$

Medida de um arco de circunferência

Em uma mesma circunferência, o comprimento de um arco (em determinada unidade) é diretamente proporcional à sua medida angular (em grau). Sendo assim, segue alguns exemplos:

1. Um arco de 60° tem o dobro do comprimento de um arco de 30°.
2. Um arco de 90º tem o triplo do comprimento de um arco de 30º.
3. Um arco de 150º tem o quíntuplo do comprimento de um arco de 30º.

Assim, é possível determinar uma proposição onde o comprimento do arco se relacionará com o comprimento do ângulo central da circunferência. Dessa forma, temos:

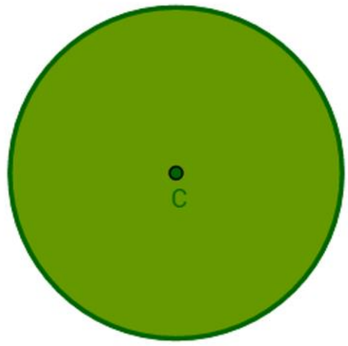
Comprimento do arco		Medida do ângulo central
$2\pi r$	————	$360°$
ℓ	————	α

Assim, temos que:

$$\frac{2\pi r}{\ell} = \frac{360°}{\alpha}$$

Círculo

Círculo é o conjunto de pontos resultantes da união entre uma **circunferência** e seus pontos internos. Em outras palavras, o círculo é a área cuja fronteira é uma circunferência.



Capítulo 10 – Polígonos regulares e regiões circulares

Polígono regular

Um polígono é regular quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si.
Veja alguns exemplos de polígonos regulares:

Propriedades dos polígonos regulares
1ª propriedade

Uma das propriedades dos polígonos regulares é: sempre é possível traçar uma circunferência circunscrita a eles.

Dizemos então que todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. Em um polígono inscrito em uma circunferência, todos os vértices pertencem à circunferência, como observamos no hexágono regular abaixo.

2ª propriedade

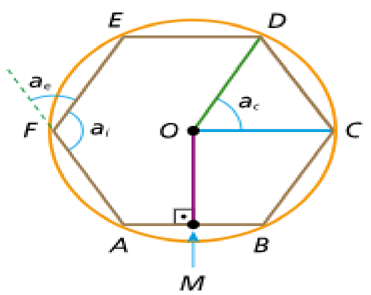
Os polígonos regulares apresentam também outra propriedade: sempre é possível inscrever neles uma circunferência.

Em um polígono convexo circunscrito a uma circunferência, cada um dos lados tem apenas um ponto em comum com a circunferência, como observamos no octógono regular abaixo.

Para circunscrever um polígono regular de *n* lados em uma circunferência, basta dividi-la em *n* partes iguais e traçar todas as tangentes nos pontos de divisão, determinando, assim, os lados do polígono.

Elementos de um polígono regular

Para determinar os elementos de um polígono regular vamos analisar a seguinte figura:



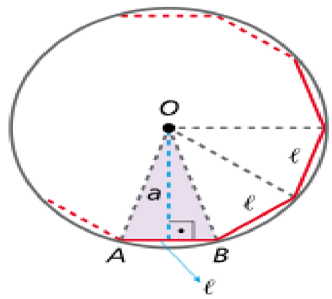
- **centro do polígono**: centro da circunferência circunscrita a ele (ponto *O*);
- **raio do polígono**: raio da circunferência circunscrita a ele;
- **apótema do polígono**: segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados;
- **ângulo central**: aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contêm vértices consecutivos do polígono .
- **ângulo interno**: aquele que é formado por dois lados consecutivos do polígono .
- **ângulo externo**: suplemento do ângulo interno correspondente.

Representando por a_c a medida de cada ângulo central de um polígono regular de *n* lados, por a_i a medida de cada ângulo interno desse polígono e por S_i a soma das medidas desses ângulos internos, temos:

$$a_c = \frac{360°}{n}, \quad a_i = \frac{S_i}{n} \quad \text{e} \quad S_i = (n-2)\cdot 180°$$

Área de um Polígono regular

Considere um polígono regular de n lados.



Considerando l a medida do lado do polígono e “a” a medida de seu apótema, a área do triangulo AOB é dada por:

$$\frac{\ell \cdot a}{2}$$

Como o polígono tem n lados, podemos decompô-lo em n triângulos congruentes ao triângulo AOB. Assim, sua área total é:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell}{2} \cdot a$$

Analise que $\frac{nL}{2}$ é a metade do perímetro do polígono regular de n lados. Chamamos de semiperímetro a metade do perímetro de um polígono e o indicamos por p. Assim:

$$A = \frac{n\ell}{2} \cdot a = p \cdot a$$

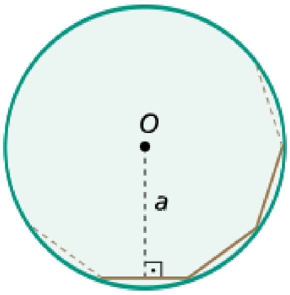
Portanto, a área de um polígono regular é igual ao produto de seu semiperímetro (p) pela medida do apótema (a) desse polígono. Ou seja:

$$A = p \cdot a$$

Área de regiões Circulares

Área do círculo

Considere um círculo de centro O e raio de medida r. Vamos inscrever nesse círculo um polígono regular de n lados, sendo a a medida do apótema do polígono.



Supondo que o número de lados (n) cresça indefinidamente, acontecerá o seguinte: o perímetro do polígono regular vai se aproximar do comprimento da circunferência **C = 2·π·r** e, portanto, o semiperímetro p se aproximará de **π·r**;

A medida do apótema do polígono regular vai se aproximar do raio do círculo;

A área do polígono regular vai se aproximar da área do círculo.

Assim, considerando que a área do círculo é aproximadamente igual à área de um polígono regular com um número grande de lados, temos:

$$A_{\text{círculo}} \simeq \underset{\downarrow \atop \pi r}{p} \cdot \underset{\downarrow \atop r}{a}$$

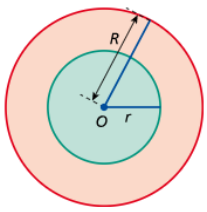
$$A_{\text{círculo}} \simeq \pi r \cdot r$$

Assim, os matemáticos conseguiram provar que:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

Área de uma coroa circular

Na figura abaixo, temos dois círculos concêntricos (círculos que possuem o mesmo centro). O círculo menor tem raio de medida r, e o maior, raio de medida R.



A parte externa da figura, ou seja, a parte em vermelho, é chamada de coroa circular.

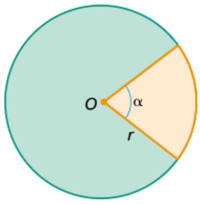
Observe que a área da coroa circular é igual à diferença entre a área do círculo de maior raio e a área do círculo de menor raio, ou seja:

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A_{\text{coroa circular}} = \pi(R^2 - r^2)$$

Área de um setor circular

Todo ângulo central determina em um círculo uma região chamada de **setor circular**.



Observe na ilustração o setor circular cujo ângulo central mede α. A área desse setor circular é diretamente proporcional à medida do seu ângulo central, em grau. Assim:

Área	Medida do ângulo central
πr^2	360°
$A_{\text{setor circular}}$	α

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi r^2}{A_{\text{setor circular}}} =$$

Portanto, a área de um setor circular de raio *r* e ângulo central de medida α, em grau, é dada por:

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360°}$$

Exercícios Propostos

1. Em uma circunferência de 15 cm de raio, o arco de um setor circular mede 10π cm. Determine:
   a. a medida, em grau, do ângulo central desse setor;
   b. a área desse setor.
2. O ângulo central de um setor circular mede 60° e sua área é 16π cm². Calcule:
   a. a área, em cm², do círculo que contém esse setor;
   b. o comprimento da circunferência desse círculo;
   c. o comprimento do arco desse setor.
3. O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 42 m. Calcule o

perímetro do quadrado inscrito nessa circunferência.

4. A medida do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência é $8\sqrt{2}\,cm$. Calcule a medida do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.
5. (PUC-RJ) Triplicando-se o raio de uma circunferência:

   a. área é multiplicada por .

   b. o comprimento é multiplicado por .
   c. a área é multiplicada por 9 e o comprimento por 3.
   d. a área e o comprimento são ambos multiplicados por 3.
   e. a área é multiplicada por 3 e o comprimento por 9.

Referencias

GUELLI, Oscar. *Dando corda na trigonometria*. São Paulo: Ática, 2000. (Coleção Contando a História da Matemática)

IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Equação do 2º grau*. São Paulo: Atual, 2004. (Coleção Pra que serve Matemática?)

MACHADO, Nílson José. *Lógica? É lógico!* São Paulo: Scipione, 2000. (Coleção Vivendo a Matemática)

MIANI, Marcos. Matemática/9º ano. 1º Ed. São Paulo. IBEP. 2012 (Coleção Eu gosto mais)

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/circulo-circunferencia.htm. Acesso em 20/01/2019

https://www.somatematica.com.br/fundam/raztrig/razoes3.php. Acesso em 20/01/2019

https://sabermatematica.com.br/comprimento-de-arco.html. . Acesso em 20/01/2019

https://www.todamateria.com.br/razoes-trigonometricas/. Acesso em 20 de janeiro de 2019

https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/diagonal-quadrado.htm. Acesso em 20 de janeiro de 2