Ensino Médio

2ª série

Matemática

Manual exclusivo do aluno

INSTITUTO EDUCACIONAL
VERA CRUZ

UNIDADE I

Potenciação e função exponencial

Potenciação

Potência de um número real com expoente natural

Dado um número real "a" qualquer e um número natural "n" sendo n>1, a potência a^n é o produto de n fatores iguais ao fator a.

$a^n = a . a . a . a .... a$

Exemplos:

a) $5^3 = 5 . 5 . 5$
b) $4^2 = 4 . 4$

Potência de um número real com expoente inteiro

Os números inteiros dividem-se em inteiros positivos, inteiros negativos e o número zero. Sendo assim, a maneira de calcular as potências quando o expoente é negativo, difere do cálculo para expoentes positivos.

Potência com expoente negativo

Seja x^{-y} uma potência de expoente negativo, o resultado dessa operação é: o inverso de x elevado a y, em termos matemáticos:

$$(1/x)^{-y}.$$

Exemplos:

a) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-3}{2}\right)^{4} = \frac{81}{16}$
b) $10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{1} = \frac{1}{10}$

Definições

Todo número elevado à zero é igual a um

$a^0=1$

Potência com expoente 1

Qualquer número, elevado a 1 será igual a ele mesmo. De modo geral: $a^1=a$

Toda potência de base 1 é igual ao próprio 1.

Nas potências com base 1, dados por 1^n, sendo ***n*** pertencente aos reais, não importa o valor de "n", será sempre 1.

$1^n=1$

Potências com base igual a 0

Toda potência com base igual a 0, 0^n, sendo o expoente n >0, será igual a zero.

$$0^n = 0$$

Propriedades de Potência

Produto de Potências de mesma base: No produto de potências de mesma base, repete-se a base e soma-se os expoentes.
Exemplo: $2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$.

Quociente de Potências de mesma base: No quociente de potências de mesma base, repete-se a base e subtrai-se os expoentes.
Exemplo: $2^3 . 2^2 = 2^{3-2} = 2^1$.

Potência de Potência: Nos casos em que há uma potenciação elevada a um outro expoente, existem duas situações que devem ser analisadas.

1ª situação: Caso em que a primeira potência está separada da segunda por parênteses.
Exemplo: $(3^2)^3$ - Nesses casos, resolve-se primeiro a primeira potência para que assim, possa-se resolver a potência externa aos parênteses. Assim, $3^2 = 3 . 3 = 9$ e $9^3 = 9 . 9 .9 = 729$. Mas há uma outra maneira de resolver estes tipos de potências, basta que se multiplique o expoente de dentro do parêntese pelo expoente que está fora. Desse modo, temos: $(3^2)^3 = 3^6 = 3. 3. 3. 3. 3. 3 = 729$.

2ª situação: Caso a primeira potência não esteja separada por parênteses da segunda, elevamos primeiro os expoentes um ao outro, e depois resolvemos a potência com a base inicial. **Potência de uma multiplicação:** A multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um dado expoente é igual a multiplicação desses fatores, cada um elevado ao mesmo expoente:

Exemplo: $(a . b)^n = (a^n . b^n)$

Potência de uma divisão: A divisão de dois fatores elevados a um dado expoente é igual a divisão desses fatores, cada um elevado ao mesmo expoente.

Exemplo: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Potência de base 10

Na potência de base 10 algumas definições são importantes:

1ª: O número de zeros na potência é igual ao valor do expoente.
Exemplo: $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$.

2º: Quando a potência possui expoente negativo, o resultado será um número decimal, onde o número de zeros a esquerda do 1, é igual ao valor absoluto do expoente.
Exemplo: $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-3} = 0{,}001$

3º: Quando se multiplica um número decimal por 10, 10^2, 10^3, ..., a vírgula do número decimal se desloca para a direita, ou seja, o valor desse número tende a aumentar.
Exemplo: $0{,}65 . 10 = 6{,}5$; $7{,}6 . 10^2 = 7{,}6 . 100 = 760{,}0$

4º: Quando se multiplica um número decimal por uma potência de base 10, porém com expoente negativo, o produto será também um decimal, e a vírgula, desloca-se para a esquerda, ou seja, o valor desse número diminuirá.
Exemplo: $45{,}8 . 10^{-1} = 45{,}8 . 1/10 = 45{,}8/10 = 4{,}58$.

Notação científica

Em notação científica, um dos fatores é um número maior ou igual a 1 e menor ou igual a 10 e o outro fator é uma potência de 10.

Equação exponencial

Chamamos de equações exponenciais toda equação na qual a incógnita aparece em expoente.
Exemplos de equações exponenciais:

$3^x=81$ (a solução é x=4)
$2^{x-5}=16$ (a solução é x=9)
$16^x-4^{2x-1}-10=2^{2x-1}$ (a solução é x=1)
$3^{2x-1}-3^x-3^{x-1}+1=0$ (as soluções são x'=0 e x''=1).

Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da equação a potências de mesma base;
2º) aplicação da propriedade:

$$\boxed{a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 1 \text{ e } a > 0)}$$

Exemplo: $3^x=81$
Resolução: Como $81=3^4$, podemos escrever $3^x = 3^4$. Logo, x=4.

Função exponencial

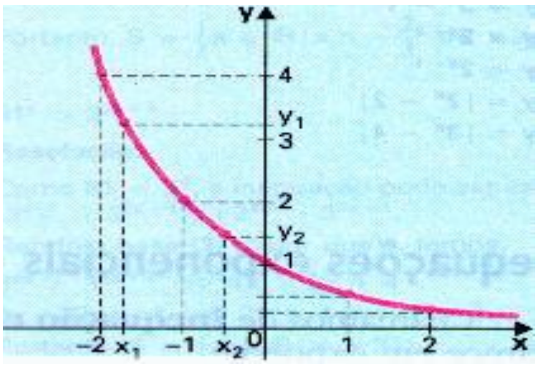
Chamamos de funções exponenciais aquelas nas quais temos a variável aparecendo em expoente.

A função f:IR→IR⁺ definida por $f(x)=a^x$, com a ∈ IR⁺ e a≠1, é chamada função exponencial de base a. O domínio dessa função é o conjunto IR (reais) e o contradomínio é IR⁺ (reais positivos, maiores que zero).

Gráfico cartesiano da função exponencial

Temos 2 casos a considerar:
➔ quando a>1;
➔ quando 0<a<1.

Acompanhe os exemplos seguintes:
Exemplo 1: $y=2^x$ (nesse caso, a=2, logo a>1)
Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:



x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

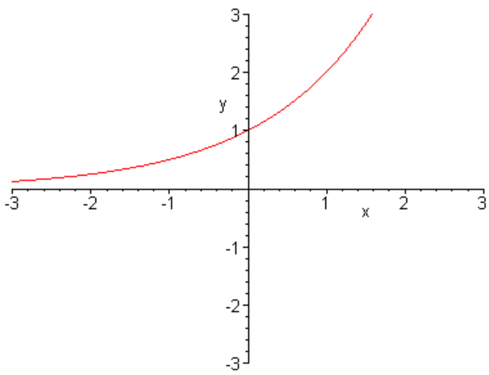
Exemplo 2: $y=(1/2)^x$ (nesse caso, a=1/2, logo 0<a<1)
Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4

Nos dois exemplos, podemos observar que:

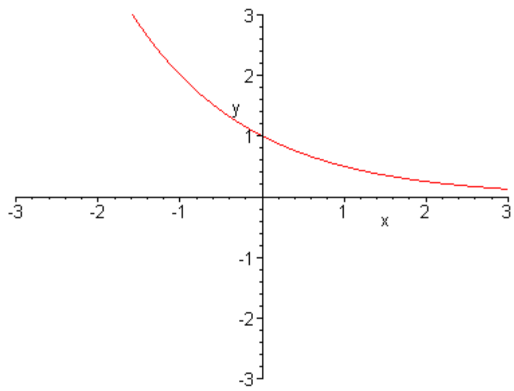
- o gráfico nunca intercepta o eixo horizontal; a função não tem raízes;
- o gráfico corta o eixo vertical no ponto (0,1);
- os valores de y são sempre positivos (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é Im=IR⁺.

Além disso, podemos estabelecer o seguinte:
a>1



f(x) é crescente e Im=IR+ Para quaisquer x1 e x2 do domínio:
x2>x1 ⇒ y2>y1 (as desigualdades têm mesmo sentido)

0<a<1



f(x) é decrescente e Im=IR+ Para quaisquer x1 e x2 do domínio: x2>x1 ⇒ y2<y1 (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Inequações exponenciais

Chamamos de inequações exponenciais toda inequação na qual a incógnita aparece em expoente.

Exemplos de inequações exponenciais:

1) $3^x > 81$ (a solução é $x > 4$)
2) $2^{2x-2} \leq 2^{x^2-1}$ (que é satisfeita para todo x real)
3) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (que é satisfeita para x ≤ -3)
4) 25^x-150.$5^x + 3125 < 0$ (que é satisfeita para $2 < x < 3$)

Para resolver inequações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;

2º) aplicação da propriedade:

a>1	0<a<1
$a^m > a^n \Rightarrow m>n$ (as desigualdades têm mesmo sentido)	$a^m > a^n \Rightarrow m<n$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Exercício resolvido:

1) $4^{x-1} + 4^x - 4^{x+1} > \frac{-11}{4}$

Resolução:

A inequação pode ser escrita $\frac{4^x}{4} + 4^x - 4^x.4 > \frac{-11}{4}$.

Multiplicando ambos os lados por 4 temos:

$4^x + 4.4^x - 16.4^x > -11$, ou seja:

$(1 + 4 - 16).4^x > -11 \Rightarrow$ -11.$4^x > -11$ e daí, $4^x < 1$

Porém, $4^x < 1 \Rightarrow 4^x < 4^0$.

Como a base (4) é maior que 1, obtemos:

$4^x < 4^0 \Rightarrow x < 0$

Portanto S = IR^- (reais negativos)

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Introdução

A função f:IR⁺→IR definida por $f(x)=\log_a x$, com a≠1 e a>0, é chamada função logarítmica de base a. O domínio dessa função é o conjunto IR^+ (reais positivos, maiores que zero) e o contradomínio é IR (reais).

Gráfico cartesiano da função logarítmica

Temos 2 casos a considerar:

➔ quando a>1;

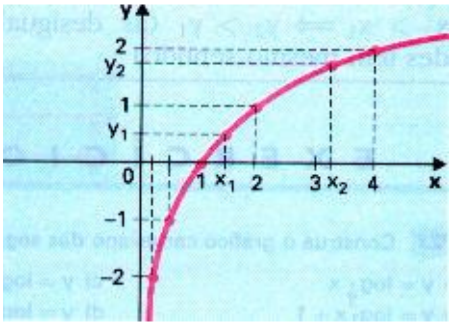
➔ quando 0<a<1.

Acompanhe nos exemplos seguintes, a construção do gráfico em cada caso:

$y=\log_2 x$ (nesse caso, a=2, logo a>1)

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

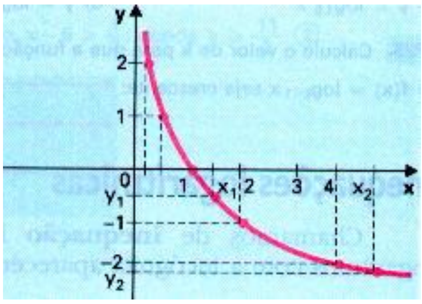
X	1/4	1/2	1	2	4
Y	-2	-1	0	1	2



$y=\log_{(1/2)} x$ (nesse caso, a=1/2, logo 0<a<1)

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y, obtemos a tabela e o gráfico abaixo:

x	¼	1/2	1	2	4
y	2	1	0	-1	-2

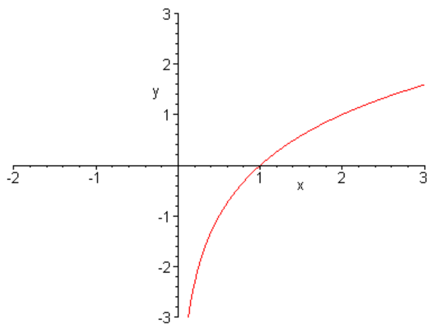


Nos dois exemplos, podemos observar que

- o gráfico nunca intercepta o eixo vertical;
- o gráfico corta o eixo horizontal no ponto (1,0). A raiz da função é x=1;
- y assume todos os valores reais, portanto o conjunto imagem é Im=IR.

Além disso, podemos estabelecer o seguinte:

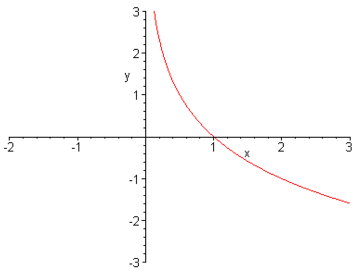
a>1



Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio:

$x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$ (as desigualdades têm mesmo sentido)

0<a<1



Para quaisquer x_1 e x_2 do domínio:

$x_2 > x_1 \Rightarrow y_2 < y_1$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Equações logarítmicas

Chamamos de equações logarítmicas toda equação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplos de equações logarítmicas:

- $\log_3 x = 5$ (a solução é x=243)
- $\log(x^2-1) = \log 3$ (as soluções são x'=-2 e x''=2)
- $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = \log_2 7$ (a solução é x=4)
- $\log_{x+1}(x^2-x)=2$ (a solução é x=-1/3)

Alguns exemplos resolvidos

1) $\log_3(x+5) = 2$

Resolução:

Condição de existência: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

$\log_3(x+5) = 2 \Rightarrow x + 5 = 3^2 \Rightarrow x = 9 - 5 \Rightarrow x = 4$

Como x=4 satisfaz a condição de existência, então o conjunto solução é S={4}.

2) $\log_2(\log_4 x) = 1$

Resolução:

Condição de existência: $x > 0$ e $\log_4 x > 0$

$\log_2(\log_4 x) = 1$; sabemos que $1 = \log_2(2)$, então:

$\log_2(\log_4 x) = \log_2(2) \Rightarrow \log_4 x = 2 \Rightarrow 4^2 = x \Rightarrow x = 16$. Como x=16 satisfaz as condições de existência, então o conjunto solução é S={16}.

3) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ 3.\log x - 2.\log y = 1 \end{cases}$$

Resolução:

Condições de existência: x>0 e y>0

Da primeira equação temos:

$\log x + \log y = 7 \Rightarrow \log y = 7 - \log x$

Substituindo log y na segunda equação temos:

$3.\log x - 2.(7 - \log x) = 1 \Rightarrow 3.\log x - 14 + 2.\log x = 1 \Rightarrow 5.\log x = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log x = 3 \Rightarrow x = 10^3$

Substituindo $x = 10^3$ em $\log y = 7 - \log x$ temos:

$\log y = 7 - \log 10^3 \Rightarrow \log y = 7 - 3 \Rightarrow \log y = 4 \Rightarrow y = 10^4$.

Como essas raízes satisfazem as condições de existência, então o conjunto solução é $S=\{(10^3;10^4)\}$.

Inequações logarítmicas

Chamamos de inequações logarítmicas toda inequação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplos de inequações logarítmicas:

1) $\log_2 x > 0$ (a solução é x>1)

2) $\log_4(x+3) \leq 1$ (a solução é $-3<x\leq 1$)

Para resolver inequações logarítmicas, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da inequação a logaritmos de mesma base;

2º) aplicação da propriedade:

a>1	0<a<1
$\log_a m > \log_a n \Rightarrow m>n>0$ (as desigualdades têm mesmo sentido)	$\log_a m > \log_a n \Rightarrow 0<m<n$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

Unidade II

Matrizes e Determinantes
Definição

Podemos entender uma matriz como sendo uma tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Dizemos que a matriz tem ordem m x n (lê-se: ordem m por n). Exemplos:

A = (1 0 2 -4 5)	é uma matriz de uma linha e cinco colunas (matriz de ordem 1 x 5)
$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$	é uma matriz de três linhas e quatro colunas (matriz 3 x 4)
$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	é uma matriz de três linhas e quatro colunas (matriz 3 x 4)
$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	A matriz C possui o número de linhas igual ao de colunas. Dizemos, então que ela é uma matriz quadrada de ordem 3x3 ou, simplesmente, Matriz de ordem 3.

Uma matriz A de ordem m x n , pode ser indicada como A = (a_{ij})mxn , onde aij é o elemento da linha i e coluna j da matriz.

Na matriz C do exemplo anterior, temos $a_{23} = -4$, $a_{33} = 3$, $a_{31} = 8$, e assim sucessivamente.

Desta forma podemos generalizar uma Matriz pela expressão a_{ij}, da seguinte forma:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Tipos de Matrizes

NOME	CARACTERÍSTICA	EXEMPLO
Linha	Possui apenas 1 linha	A = (2 3 -1 4)
Coluna	Possui apenas 1 coluna	$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
Quadrada	Possui a mesma quantidade de linhas e colunas	$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
Diagonal	Matriz quadrada que possui os elementos da diagonal principal diferentes de zero e os demais elementos iguais a zero.	$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Identidade	Matriz diagonal que possui os elementos da diagonal principal iguais a um e os demais elementos iguais a zero.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Nula	Matriz que possui todos os elementos iguais a zero	$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Triangular Superior	Matriz quadrada em que os elementos localizados abaixo da diagonal principal são nulos.	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
Triangular Inferior	Matriz quadrada em que os elementos localizados acima da diagonal principal são nulos.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Operações Matriciais

As operações possíveis de serem realizadas entre duas ou mais matrizes são a Adição, Subtração, Multiplicação e Transposição.

Adição e subtração de Matrizes

Para somarmos ou subtrairmos duas matrizes basta que somemos ou subtraiamos os seus elementos de mesma posição. Veja os exemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 & 9 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Nas operações de adição e subtração de matrizes só podemos somar e subtrair matrizes de mesma ordem. A matriz resposta terá a mesma ordem das matrizes somadas ou subtraídas. Desta forma, a soma A(m x n) + B(m x n) = C(m x n).

Propriedades da soma entre Matrizes

a) A + B = B + A
b) (A + B) + C = A + (B + C)
c) A + 0 = 0 + A = A
d) A + (-A) = (-A) + A = 0

Multiplicação de Matrizes

Separamos a multiplicação de matrizes em dois casos: multiplicação de um número real por uma matriz e multiplicação de matrizes entre si.

Multiplicação de um número real por uma Matriz

Para multiplicarmos um número real por uma matriz, basta que cada elemento da matriz seja multiplicado pelo número real em questão.

Exemplo:

$$4.\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 0 \\ -4 & 28 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de um número real por uma Matriz

a) k. (n. A) = (k.n).A
b) (k + n).A = k.A + n.A
c) k.(A + B) = k.A + k.B
d) 1.A = A
e) 0. A = 0
f) k.0 = 0

Multiplicação entre matrizes

A multiplicação entre matrizes exige algumas condições iniciais. A principal é que, para que exista o produto de duas matrizes A e B, o número de colunas de A , tem de ser igual ao número de linhas de B.

A(m x n) x B(n x q) = C(m x q)

Observe que se a matriz A tem ordem m x n e a matriz B tem ordem n x q, a matriz produto C tem ordem m x q. Veja a tabela a seguir:

Ordem da matriz A	Ordem da matriz B	Ordem da matriz AxB
2 x 7	7 x 5	2 x 5
3 x 4	4 x 2	3 x 2
4 x 4	4 x 4	4 x 4
2 x 5	2 x 5	produto inexistente
3 x 6	4 x 8	produto inexistente

Algoritmo prático para cálculo do produto entre matrizes

Para efetuar o produto entre duas matrizes A e B, podemos utilizar o seguinte algoritmo prático:

$$\begin{array}{c|c} \textit{cálculos} & \textit{matriz B} \\ \hline \textit{matriz A} & \textit{matriz produto AxB} \end{array}$$

Exemplo: Dadas as matrizes

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como B(4 x 3) e C(3 x 3), o produto será D(4 x 3)

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 2 & -1 \\ & & & 7 & 1 & -4 \\ & & & 8 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 2.2+3.7+0.8 & 2.2+3.1+0.1 & 2.(-1)+3.(-4)+0.3 \\ 0 & 2 & -1 & 0.2+2.7+(-1).8 & 0.2+2.1+(-1).1 & 0.(-1)+2.(-4)+(-1).3 \\ 1 & 0 & 2 & 1.2+0.7+2.8 & 1.2+0.1+2.1 & 1.(-1)+0.(-4)+2.3 \\ 3 & 1 & 4 & 3.2+1.7+4.8 & 3.2+1.1+4.1 & 3.(-1)+1.(-4)+4.3 \end{array}$$

Então a matriz produto D será:

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 7 & -14 \\ 6 & 1 & -11 \\ 18 & 4 & 5 \\ 45 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriedades do Produto entre matrizes

a) A.B é diferente de B.A
b) (A.B).C = A.(B.C)
c) C.(A + B) = C.A + C.B
d) (A + B).C = A.C + B.C
e) A.I = I.A = A
f) A.0 = 0

Matriz Transposta

A matriz transposta é conseguida quando permutamos linhas por colunas e vice-versa. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Observe que a ordem da matriz A é 2 x 3 e a ordem da matriz transposta é 3 x 2. Deste modo, se a matriz original possui ordem m x n, a matriz transposta terá ordem n x m.

Propriedades da matriz transposta

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(n.A)^t = n.A^t$

d) $(A.B)^t = B^t . A^t$

e) No caso de matrizes quadradas, se $A = A^t$, então dizemos que a matriz A é simétrica.

f) Ainda para matrizes quadradas, se $A = -A^t$, dizemos que a matriz A é anti-simétrica.

g) Sendo A uma matriz anti-simétrica , temos que $A + A^t = 0$ (matriz nula).

Equações Matriciais

Uma equação é chamada de Matricial quando envolve matrizes em suas operações.

Exemplo: Dadas as matrizes A e B a seguir, calcule a Matriz X, dada pela equação 2A + X = 3B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Resolução:</u>

Se 2A + X = 3B, então

X = 3B - 2A

$$X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ -3 & 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 14 & -4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 4 \\ 9 & 2 & -6 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Chamamos de Matriz inversa à matriz quadrada de ordem n que, ao ser multiplicada pela matriz inicial, resulta na matriz identidade, ou seja: $A.A^{-1} = I_n$

Podemos encontrar a matriz inversa da Matriz A, do seguinte modo:

Sendo

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ então a sua inversa será tal que:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ realizando a multiplicação entre as matrizes

$$\begin{array}{cc|cc} & & a & c \\ & & b & d \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ 2 & -1 & 2a-b & 2c-d \end{array}$$

podemos concluir que:

a = 1/2; b = 1; c = 1/2 e d = 0.

Chega-se, então à matriz inversa, de A, dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTES

Definição

Determinantes são números associados a matrizes quadradas. Representamos o determinante de uma matriz através de duas barras verticais. Deste modo, se a matriz A é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Então representamos o seu determinante por:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Cálculo de Determinantes

Cada ordem de matriz apresenta uma forma particular para o cálculo do seu determinante.

Determinante de uma matriz de primeira ordem

O determinante da matriz A de ordem 1, é o próprio número que origina a matriz.

Exemplo:

A = (3), então det. A = 3.

Determinante de matriz de segunda ordem

Para calcular o determinante de uma matriz de segunda ordem basta subtrairmos o produto da diagonal secundária, do produto da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemplo: o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

é dado por: 0.(-1) - 2.1 = 0 - 2 = -2

Determinante de matriz de terceira ordem

Para calcular o determinante de matrizes de terceira ordem, utilizamos a chamada regra de Sarrus, que resulta no seguinte cálculo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + idb)$$

Exemplo: o determinante da matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

é dado por: (2.1.3 + 7.1.(-1) + 8.2.(-4)) - ((-1).1.8 + (-4).1.2 + 3.2.7) = (6 - 7 - 64) - (-8 - 8 + 42) = (-65) - (26) = 91.*4.*

Determinantes de ordem maior ou igual a 4

Para calcularmos o determinante de matrizes com ordem igual ou superior a quatro, podemos reduzir a sua ordem, utilizando o seguinte procedimento:

Dada a matriz quadrada

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Chama-se de determinante de A ao número det A = a_{11}. D_{11} - a_{12}. D_{12} + a_{13}. D_{13} - ... + (-1)n+1. a_{1n}. D_{1n}, onde D_{11}, D_{12}. D_{13}, ..., são os números complementares dos elementos a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n} da matriz A.

Para calcular estes números complementares, devemos eliminar a linha e a coluna a que o número em questão pertence. Deste modo, para calcular o complementar de a_{11}, devemos eliminar a 1ª linha e a 1ª coluna da matriz A. Já para encontrar o complementar de a_{13}, devemos eliminar a 1ª linha e a 3ª coluna da matriz A.

Exemplo: Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

o Det A será dado por:

$$1.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-3).\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Calculando os determinantes das matrizes de terceira ordem, pela regra de Sarrus, temos:1.0 - 0.12 -3.(-12) - 2.(-8)=0 - 0 + 36 + 16 = 52

Este procedimento deve ser utilizado para matrizes de ordem superior a quatro. Neste caso reduzimos a matriz sucessivamente, até que ela atinja a ordem 3, quando então aplicamos a regra de Sarrus.

Propriedades dos Determinantes

1. det A = det A^t

2. Se uma fila (linha ou coluna) da matriz é composta de zeros, então o determinante desta matriz será zero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

3. Se duas filas paralelas de um determinante forem iguais, ou proporcionais, o determinante será nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

O determinante é nulo porque a primeira e a terceira coluna são iguais (C1 = C3). Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

O determinante é nulo porque a terceira coluna é o triplo da primeira. (C3 = 3.C1).

4. Um determinante é nulo se uma fila for combinação linear de outras filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \\ 4 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

O determinante é nulo porque L1 + L2 = L3

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

O determinante é nulo porque 2.L1 + L2 = L3

5. Um determinante mudará de sinal quando trocamos a posição de duas filas paralelas.

SISTEMAS LINEARES

Equação linear

Entende-se por equação linear nas variáveis (incógnitas) x_1, x_2, x_3, ... , x_n , como sendo a equação da forma $a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + ... + a_n.x_n = b$ onde a_1, a_2, a_3, ... a_n e b são números reais ou complexos.

a1, a2, a3, ... an são denominados coeficientes e b, termo independente.

Exemplos de equações lineares:

$4x_1 + 2x_2 = 9$

$3x + 4y = 5$

$-2x + 3y +5z = 12$

$-x -3y -7z + 3w = 17$

A solução de uma equação linear

Chama-se de solução de uma equação linear aos valores que, ao serem substituídos nas incógnitas, cheguem à uma igualdade verdadeira. Por exemplo: a equação x + y + z = 5 apresenta como solução os valores x = 1, y = 4 e z = 0, uma vez que 1 + 4 + 0 = 5. Os valores x = 3, y = 7 e z = -5 também são soluções da equação, uma vez que 3 + 7 - 5 = 5. Podemos, então, afirmar que existem infinitas soluções (um número infinito de ternos ordenados) que satisfazem à equação dada.

Sistema linear

De forma geral, podemos dizer que um sistema de equações lineares ou sistema linear é um conjunto composto por duas ou mais equações lineares. Um sistema linear pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde :

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as incógnitas ;

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ são os coeficient es;

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ são os termos independen tes.

Resolver o sistema significa encontrar os valores das incógnitas que resolvem, simultaneamente, todas as suas equações.

Por exemplo: dado o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + 3z = -1 \\ 3x - 5y + 7z = -7 \end{cases}$$

Podemos afirmar que a sua solução será a tripla x = 1, y = 2 e z = 0, pois:

2.1 + 2 - 0 = 4

1 - 2 + 3.0 = -1

3.1 - 5.2 + 7.0 = -7

Resolução de sistemas lineares

Para resolver sistemas de equações, optaremos por utilizar um método de resolução conhecido como Regra de Cramer. Esta regra depende basicamente do uso de matrizes e determinantes.

Vamos resolver o sistema proposto inicialmente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - y + 3z = -1 \\ 3x - 5y + 7z = -7 \end{cases}$$

Para resolver um sistema, devemos inicialmente encontrar a sua Matriz Principal, que é dada pelos coeficientes das incógnitas. Desta forma, a matriz principal do sistema acima será:

$$M_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Calculamos, então, o seu determinante. Para indicar o determinante de uma matriz X, escreveremos det(X).

det (Mp) = 20.

Em seguida, calcula-se os determinantes das incógnitas, que são conseguidas quando se substitui, na matriz principal, a coluna de uma das incógnitas, pela coluna dos termos independentes. Tem-se, assim, as matrizes chamadas de Mx, My e Mz, das quais também devemos calcular os determinantes.

$$M_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

det (Mx) = 20

$$M_y = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

det (My) = 40

$$M_z = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

det (Mz) = 0

Após calcular-se os determinantes da matriz principal e das matrizes das incógnitas, chega-se aos valores de x, y, z, efetuando as seguintes divisões:

$$x = \frac{\det(Mx)}{\det(Mp)} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{\det(My)}{\det(Mp)} = \frac{40}{20} = 2$$

$$z = \frac{\det(Mz)}{\det(Mp)} = \frac{0}{20} = 0$$

Conclui-se, então, aos valores de x = 1; y = 2; z = 0.

OBS: Quando dois ou mais sistemas apresentam a mesma solução, eles são chamados de Sistemas Equivalentes.

Discussão de Sistemas Lineares

Um sistema linear pode apresentar três possibilidades diferentes de solução:

1. o sistema pode ter uma única solução (neste caso será chamado de sistema possível e determinado - SPD)

2. o sistema pode ter infinitas soluções (neste caso será chamado de sistema possível e indeterminado - SPI)

3. o sistema pode não apresentar solução (neste caso será chamado de sistema impossível- SI)

Exemplos especiais de sistemas com respeito às suas soluções:

Sistema com uma única solução

As equações lineares abaixo representam duas retas no plano cartesiano que têm o ponto (3,-2) como interseção.

x + 2y = -1
2x – y = 8

Sistema com infinitas soluções

As equações lineares representam retas paralelas sobrepostas no plano cartesiano, logo existem infinitos pontos que satisfazem a ambas as equações (pertencem a ambas as retas).

2x + y = 50
4x + 2y = 100

Sistema que não tem solução

As equações lineares representam retas paralelas no plano cartesiano, logo, não existem pontos que pertençam às duas retas.

x + 3y = 2
2x + 6y = 7

No caso de sistemas com três ou mais incógnitas vale a mesma classificação. Por exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ -3x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

O sistema é um sistema possível e determinado (SPD), pois apresenta apenas a solução x = 1; y = 2; z = 3 (verifique!).

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x - z = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

O sistema é um sistema possível e indeterminado (SPI), pois apresenta infinitas soluções.

Entre estas soluções estão x = 0; y = -3; z = 1 e x = 1; y = -2; z = 3 (verifique!)

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x - 4z = 3 \end{cases}$$

O sistema é um sistema impossível (SI), pois não apresenta solução.

Pode-se afirmar que um sistema linear S de n equações, com incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, será SPD, SPI ou SI se atender às seguintes condições:

Se Mp diferente de zero
Sistema Possível e Determinado (SPD)
Se Mp = 0 e $Mx_i = 0$, para todo x_i
Sistema Possível e Indeterminado (SPI)
Se Mp = 0 e existe Mxi diferente de zero
Sistema Impossível (SI)

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear é chamado de homogêneo quando os termos independentes de todas as equações são nulos. Todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução conhecida como trivial, que é a solução identicamente nula (x = 0; y = 0; z = 0, $x_i = 0$). Assim, todo sistema linear homogêneo é possível. Este tipo de sistema poderá ser determinado (SPD) se admitir somente a solução trivial ou indeterminado (SPI) se admitir outras soluções além da trivial.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

O sistema é determinado, pois possui apenas a solução x = 0; y = 0; z = 0.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

O sistema é indeterminado, pois admite infinitas soluções, entre elas x = 0; y = 0; z = 0 e x = 2; y = 0; z = 1.

Unidade III:

Trigonometria
Trigonometria no triângulo retângulo

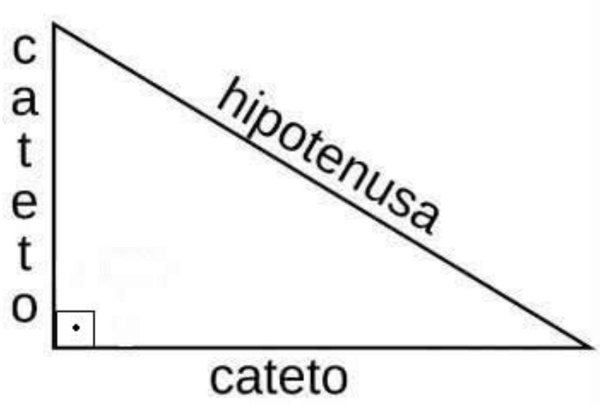
A trigonometria é a ciência responsável pelas relações estabelecidas entre os triângulos. Eles são figuras geométricas planas compostas de três lados e três ângulos internos.

A trigonometria no triângulo retângulo é o estudo sobre os triângulos que possuem um ângulo interno de 90°, chamado de ângulo reto.
O triângulo chamado equilátero possui os lados com medidas iguais. O triangulo isósceles possui dois lados com medidas iguais. Já o escaleno tem os três lados com medidas diferentes.
No tocante aos ângulos dos triângulos, os ângulos internos maiores que 90° são chamados de obtusângulos. Já os ângulos internos menores que 90° são denominados de acutângulos. Além disso, a soma dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180°.

Composição do Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é formado por catetos - lados do triângulo que formam o ângulo reto – e hipotenusa - lado oposto ao ângulo reto, sendo considerado o maior lado do triângulo retângulo.

Os catetos são classificados em: cateto adjacente e cateto oposto.



Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo

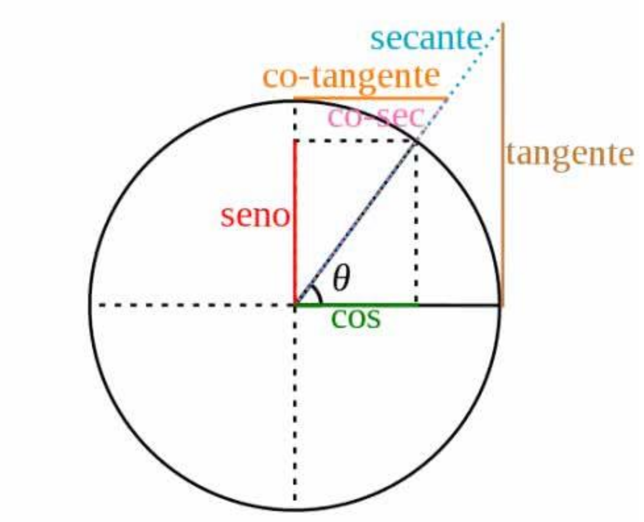
As razões trigonométricas são as relações existentes entre os lados de um triângulo retângulo. As principais são o seno, o cosseno e a tangente.

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Círculo trigonométrico e as razões trigonométricas



O círculo trigonométrico é utilizado para auxiliar nas relações trigonométricas. Acima, podemos encontrar as principais razões, sendo que o eixo vertical corresponde ao seno e o eixo horizontal ao cosseno. Além delas, temos as razões inversas: secante, cossecante e cotangente.

$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{cosseno}}$$

$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{seno}}$$

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{cosseno}}{\text{seno}}$$

Ângulos Notáveis

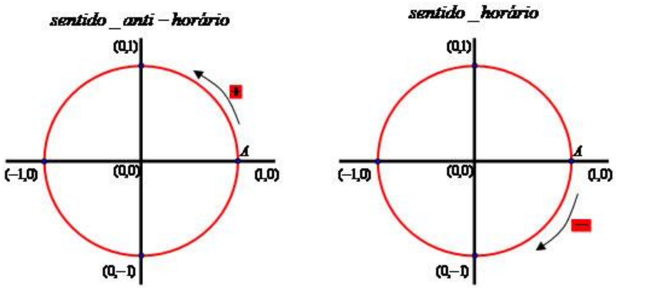
Os ângulos notáveis são ângulos que aparecem com mais frequência e assim são mais fáceis de serem identificados. Esses ângulos têm medidas de seno, cosseno e tangente como descritos na tabela abaixo:

	30º	45º	60º
Seno	1/2	√2/2	√3/2
Cosseno	√3/2	√2/2	1/2
Tangente	√3/3	1	√3

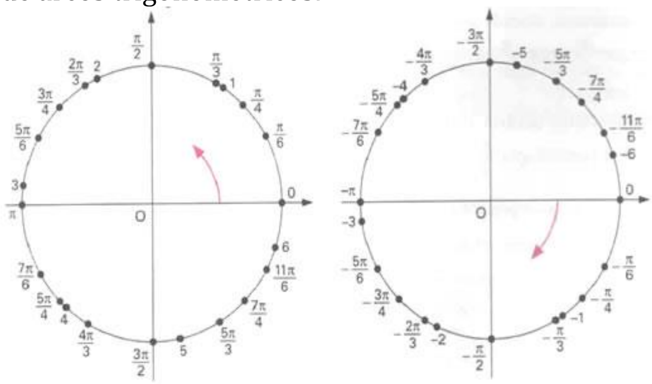
Circunferência trigonométrica

A circunferência trigonométrica está representada no plano cartesiano com raio medindo uma unidade. Ela possui dois sentidos a partir de um ponto A qualquer, escolhido como a origem dos arcos. O ponto A será localizado na abscissa do eixo de coordenadas cartesianas, dessa forma, esse ponto terá abscissa 1 e ordenada, 0. Os eixos do plano cartesiano dividem o círculo trigonométrico em quatro partes, chamadas de quadrantes, onde serão localizados os números reais α relacionados a um único ponto P. Os sentidos dos arcos trigonométricos estão de acordo com as seguintes definições:

Se α = 0, P coincide com A.
Se α > 0, o sentido do círculo trigonométrico será anti-horário.
Se α < 0, o sentido do círculo será horário.
O comprimento do arco AP será o módulo de α.

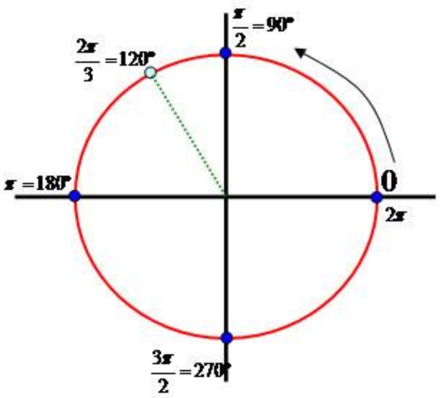


Na ilustração a seguir, estão visualizados alguns números importantes, que são referenciais para a determinação principal de arcos trigonométricos:

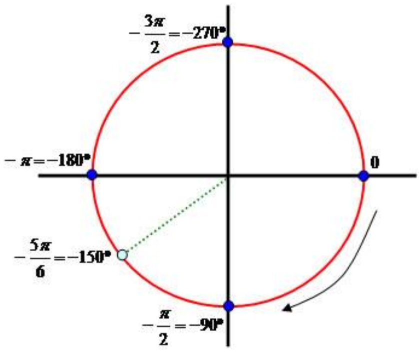


Uma volta completa no círculo trigonométrico corresponde a 360º, ou 2π radianos, se o ângulo α a ser localizado possuir módulo maior que 2π, precisamos dar mais de uma volta no círculo para determinarmos a sua imagem.

Exemplo: Localizar 8π/3 = 480º, significa que será dado uma volta completa no sentido anti-horário e localizamos o arco de comprimento 2π/3, pois 8π/3 = 6π/3 + 2π/3 = 2π + 2π/3.



Na localização da determinação principal de –17π/6 = –510º, devemos dar duas voltas completas no sentido horário e localizarmos o arco de comprimento –5π/6, pois –17π/6 = –12π/6 – 5π/6 = 2π – 5π/6.



As funções trigonométricas, também chamadas de funções circulares, estão relacionadas com as demais voltas no ciclo trigonométrico.

As principais funções trigonométricas são:

- Função Seno
- Função Cosseno
- Função Tangente

No círculo trigonométrico temos que cada número real está associado a um ponto da circunferência.

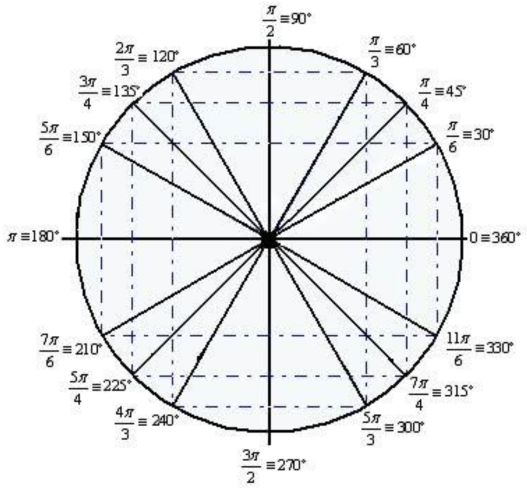


Figura do Círculo Trigonométrico dos ângulos expressos em graus e radianos

Funções Periódicas

As funções periódicas são funções que possuem um comportamento periódico. Ou seja, que ocorrem em determinados intervalos de tempo.

O período corresponde ao menor intervalo de tempo em que acontece a repetição de determinado fenômeno.

Uma função f: A → B é periódica se existir um número real positivo p tal que

$f(x) = f(x+p), \forall x \in A$

O menor valor positivo de p é chamado de período de f.

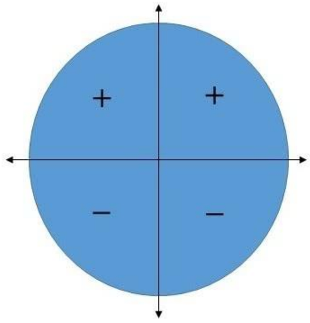
OBS.: As funções trigonométricas são exemplos de funções periódicas visto que apresentam certos fenômenos periódicos.

Função Seno

A função seno é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por:

função f(x) = sen x

No círculo trigonométrico, o sinal da função seno é positivo quando x pertence ao primeiro e segundo quadrantes. Já no terceiro e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, no primeiro e quarto quadrantes a função f é crescente. Já no segundo e terceiro quadrantes a função f é decrescente.

O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a R. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: Dom(sen)=R.

Já o conjunto da imagem da função seno corresponde ao intervalo real [-1, 1]: -1 sen x 1.

Em relação à simetria, a função seno é uma função ímpar: sen(-x) = -sen(x).

O gráfico da função seno f(x) = sen x é uma curva chamada de senoide:

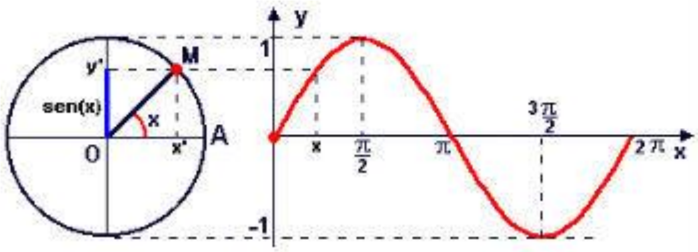


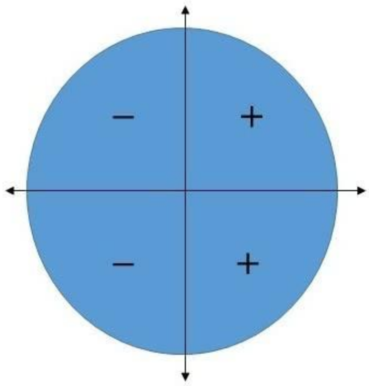
Gráfico da função seno

Função Cosseno

A função cosseno é uma função periódica e seu período é 2π. Ela é expressa por:

Função f(x) = cos x

No círculo trigonométrico, o sinal da função cosseno é positivo quando x pertence ao primeiro e quarto quadrantes. Já no segundo e terceiro quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, no primeiro e segundo quadrantes a função f é decrescente. Já no terceiro e quarto quadrantes a função f é crescente.

O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a R. Ou seja, ela está definida para todos os valores reais: Dom(cos)=R.

Já o conjunto da imagem da função cosseno corresponde ao intervalo real [-1, 1]: -1 cos x1.

Em relação à simetria, a função cosseno é uma função par: cos(-x) = cos(x).

O gráfico da função cosseno f(x) = cos x é uma curva chamada de cossenoide:

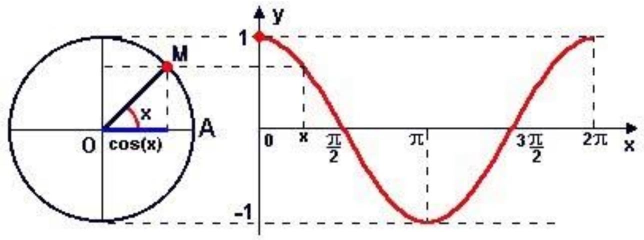


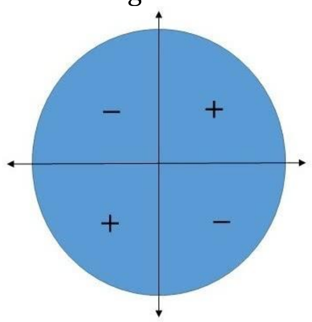
Gráfico da função cosseno

Função Tangente

A função tangente é uma função periódica e seu período é π. Ela é expressa por:

função f(x) = tg x

No círculo trigonométrico, o sinal da função tangente é positivo quando x pertence ao primeiro e terceiro quadrantes. Já no segundo e quarto quadrantes, o sinal é negativo.



Além disso, a função f definida por f(x) = tg x é sempre crescente em todos os quadrantes do círculo trigonométrico.

O domínio da função tangente é: Dom(tan)={x ∈ R | x ≠ de π/2 + kπ; K ∈ Z}. Assim, não definimos tg x, se x = π/2 + kπ.

Já o conjunto da imagem da função tangente corresponde a R, ou seja, o conjunto dos números reais.

Em relação à simetria, a função tangente é uma função ímpar: tg(-x) = -tg(-x).

O gráfico da função tangente f(x) = tg x é uma curva chamada de tangentoide:

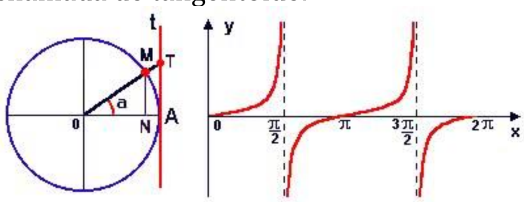


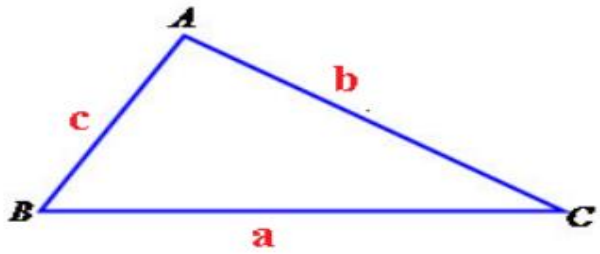
Gráfico da função tangente

Lei dos Senos

A Lei dos Senos determina que em um triângulo qualquer, a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo.

Esse teorema demonstra que num mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante.

Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos admite as seguintes relações:

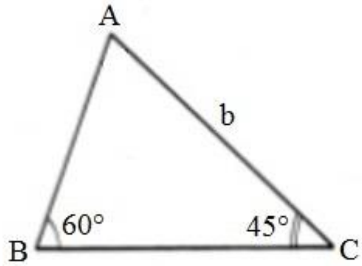


$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Representação da Leis dos Senos no triângulo

Exemplo:

Calcular a medida dos lados AB e BC desse triângulo, em função da medida b do lado AC.



Pela lei dos senos, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{b}{\text{sen } 60°} = \frac{AB}{\text{sen } 45°} = \frac{BC}{\text{sen } 75°}$$

$$AB = \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} . b$$

$$BC = \frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 60°} . b$$

Logo, AB = 0,816b e BC = 1,115b.

Obs: Os valores dos senos foram consultados na tabela das razões trigonométricas. Nela, podemos encontrar os valores dos ângulos de 1º a 90º de cada função trigonométrica (seno, cosseno e tangente).

Aplicação da Lei dos Senos

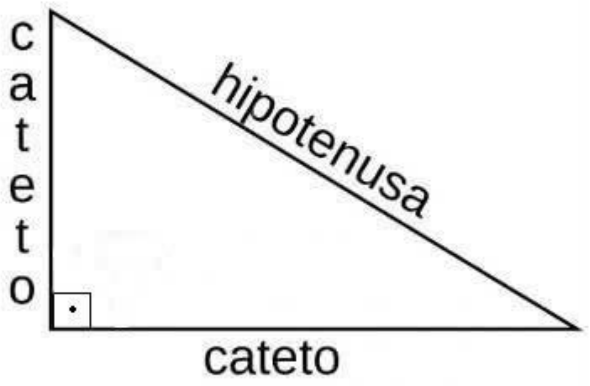
Utilizamos a Lei dos Senos nos triângulos acutângulos, onde os ângulos internos são menores que 90º (agudos); ou nos triângulos obtusângulos, que apresentam ângulos internos maiores que 90º (obtusos). Nesses casos, também é possível utilizar a Lei dos Cossenos.

O objetivo principal da utilização da Lei dos Senos ou Cossenos é de descobrir as medidas dos lados de um triângulo e ainda, de seus ângulos.

Representação de triângulos segundo seus ângulos internos

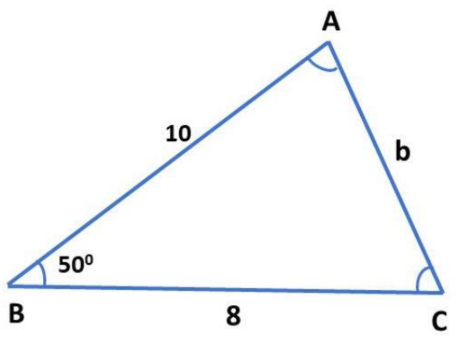
E a Lei dos Senos no Triângulo Retângulo?

Como mencionado acima, a Lei dos Senos é utilizada nos triângulos acutângulos e obtusângulos. Já nos triângulos retângulos, formados por um ângulo interno de 90º (reto), utilizamos o Teorema de Pitágoras e as relações entre seus lados: cateto oposto, adjacente e hipotenusa.



Representação do triângulo retângulo e seus lados

Assim, quando temos um triângulo retângulo, o seno será à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa:



$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

Já o cosseno, corresponde à proporção entre o comprimento do cateto adjacente e o comprimento da hipotenusa, representado pela expressão:

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

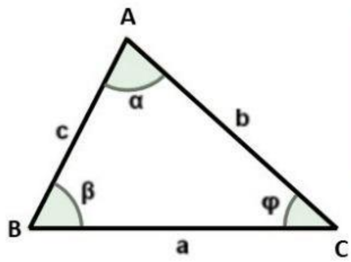
Lei dos Cossenos

A Lei dos Cossenos é utilizada para calcular a medida de um lado ou de um ângulo desconhecido de um triângulo qualquer, conhecendo suas outras medidas.

Enunciado e Fórmulas

O teorema dos cossenos estabelece que:
"Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles."

Assim, pela lei dos cossenos temos as seguintes relações entre os lados e os ângulos de um triângulo:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\varphi$$

Exemplos

1. Dois lados de um triângulo medem 20 cm e 12 cm e formam entre si um ângulo de 120º. Calcule a medida do terceiro lado.

Solução

Para calcular a medida do terceiro lado utilizaremos a lei dos cossenos. Para isso, vamos considerar:
b = 20 cm
c = 12 cm
cos α = cos 120º = - 0,5 (0,5 - Valor encontrado em tabelas trigonométricas).

Substituindo esses valores na fórmula:
$A^2 = 202 + 122 - 2 . 20 . 12 . (- 0{,}5)$
$a^2 = 400 + 144 + 240$
$a^2 = 784$
$a = \sqrt{784}$
a = 28 cm

Portanto, o terceiro lado mede 28 cm.

2. Determine a medida do lado AC e a medida do ângulo com vértice em A da figura a seguir:

Primeiramente, vamos determinar o AC = b:
$B^2 = 82 + 102 - 2 . 8 . 10 . \cos 50º$
$b^2 = 164 - 160 . \cos 50º$
$b^2 = 164 - 160 . 0{,}64279$
$b \approx 7{,}82$

Agora, vamos determinar a medida do ângulo pela lei dos cossenos:
$82 = 102 + 7{,}822 - 2 . 10 . 7{,}82 . \cos \hat{A}$
$64 = 161{,}1524 - 156{,}4 \cos \hat{A}$

cos Â = 0,62
Â = 52º

Obs: Para encontrar os valores dos ângulos do cosseno utilizamos a Tabela Trigonométrica. Nela, temos os valores dos ângulos de 1º a 90º para cada função trigonométrica (seno, cosseno e tangente).
Aplicação

A lei dos cossenos pode ser aplicada em qualquer triângulo. Seja ele acutângulo (ângulos internos menores que 90º), obtusângulo (com um ângulo interno maior que 90º), ou retângulo (com um ângulo interno igual a 90º).

Representação dos triângulos quanto aos ângulos internos que possuem

E nos Triângulos Retângulos?

Vamos aplicar a lei dos cossenos para o lado oposto ao ângulo de 90º, conforme indicado abaixo:
$A^2 = b^2 + c^2 - 2 . b . c . \cos 90º$
Como cos 90º = 0, a expressão acima fica:

$$A^2 = b^2 + c^2.$$

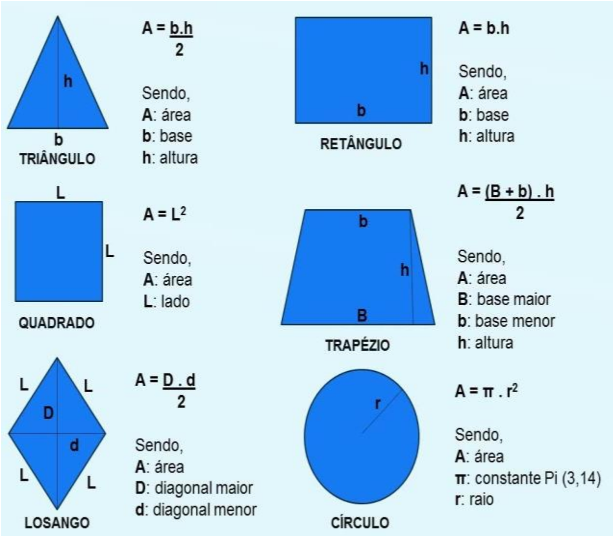
O que resulta no próprio Teorema de Pitágoras. Assim, pode-se concluir que este teorema é um caso particular da lei dos cossenos.

A lei dos cossenos é adequada para problemas em que conhecemos dois lados e o ângulo entre eles e queremos descobrir o terceiro lado.

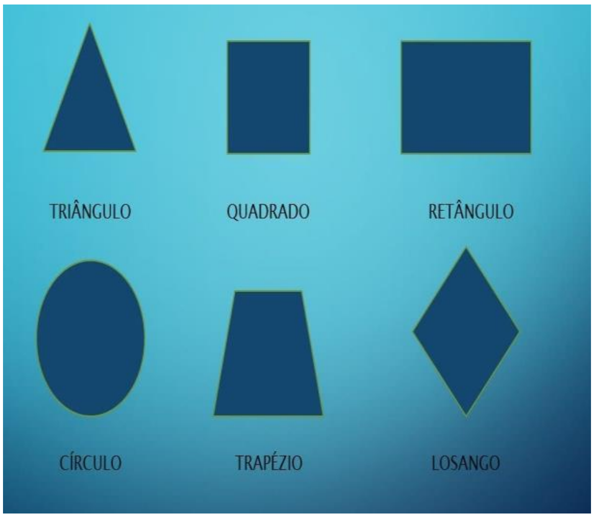
Pode-se ainda utilizá-la quando é conhecido os três lados do triângulo e pretendemos conhecer um dos seus ângulos.

Para situações em que conhecemos dois ângulos e apenas um lado e queremos determinar um outro lado, torna-se mais conveniente utilizar a Lei dos Senos.

Unidade IV:
Geometria Espacial
Área de figuras planas
As áreas das figuras planas medem o tamanho da superfície da figura. Desse modo, podemos pensar que quanto maior a superfície da figura, maior será sua área.



Principais Figuras Planas



Antes de apresentar as fórmulas das áreas das figuras planas, devemos atentar para cada uma delas:

Triângulo: polígono formado por três lados. São classificados de acordo com as medidas dos lados, bem como seus ângulos:

Quanto a medida dos lados:
Triângulo Equilátero: apresenta lados e ângulos internos iguais (60°);
Triângulo Isósceles: apresenta dois lados e dois ângulos internos congruentes;
Triângulo Escaleno: apresenta todos os lados e ângulos internos diferentes.

Quanto a medida dos ângulos:
Triângulo Retângulo: possui um ângulo interno de 90°;
Triângulo Obtusângulo: possui dois ângulos agudos internos, ou seja, menor que 90°, e um ângulo obtuso interno, maior que 90°;
Triângulo Acutângulo: possui três ângulos internos menores que 90°.

Quadrado: quadrilátero regular formado por quatro lados congruentes (mesma medida). Ele é formado por quatro ângulos internos de 90°, os quais são chamados de ângulos retos.

Retângulo: quadrilátero formado por quatro lados, dois deles na vertical e dois na horizontal. Da mesma forma que o quadrado, ele apresenta quatro ângulos internos de 90° (retos).

Círculo: Figura plana também chamada de disco. Apresenta uma forma circular. O raio do círculo representa a medida entre o ponto central da figura e uma das extremidades.

Já o diâmetro equivale duas vezes o raio, posto que representa o segmento de reta que passa pelo centro do círculo, dividindo-o em duas metades iguais.

Trapézio: quadrilátero notável com dois lados e bases paralelas, donde uma é maior e outra menor. A soma de seus ângulos internos totaliza 360°.
São classificados em:

Trapézio Retângulo: apresenta dois ângulos de 90º (ângulos retos);

Trapézio Isósceles: também chamado de trapézio simétrico donde os lados não paralelos possuem a mesma medida;

Trapézio Escaleno: todos os lados apresentam medidas diferentes.

Losango: quadrilátero equilátero formado por quatro lados iguais. Apresenta dois lados e ângulos opostos congruentes e paralelos, com duas diagonais que se cruzam perpendicularmente. Ele possui dois ângulos agudos (menores que 90º) e dois ângulos obtusos (maiores que 90º).

Fórmula das Áreas das Figuras Planas

A área e o perímetro são dois conceitos utilizados na geometria plana, no entanto, apresentam diferenças.

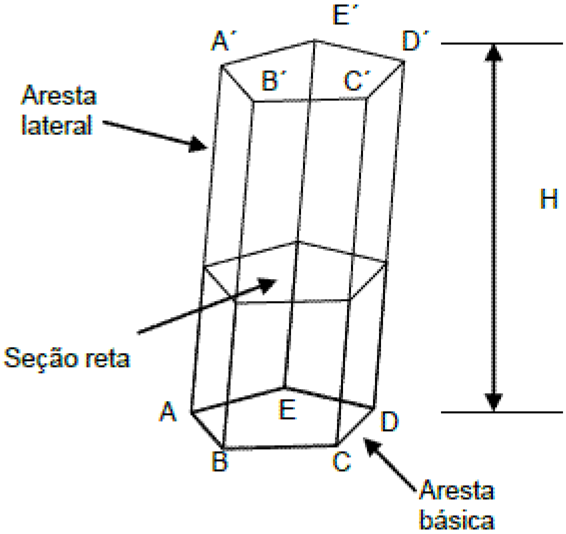
Área: tamanho da superfície da figura. O valor da área será dado sempre em cm2, m2 ou km2.

Perímetro: soma de todos os lados da figura. O valor do perímetro será dado sempre em cm, m ou km.

Prisma
Prisma de Revolução

É o sólido formado por uma superfície prismática fechada e por dois planos paralelos que interceptam todas as geratrizes.

Os polígonos congruentes determinados sobre esses planos pela superfície são as bases do prisma; os outros, suas faces laterais. Altura de um prisma é a distância H entre suas bases.



Um prisma é dito triangular, quadrangular, pentagonal, ... conforme suas bases sejam triângulos, quadriláteros, pentágonos, entre outras figuras geométrica planas.

Um prisma é reto ou obliquo conforme suas arestas laterais sejam perpendiculares ou oblíquas às bases.

Seção reta é a seção obtida no prisma por um plano perpendicular as arestas laterais.

Prisma regular é o prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

Áreas do Prisma

Área lateral (SL) é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (ST) é a soma da área lateral com as áreas das bases.

$\boxed{S_t = S_L + 2S_B}$

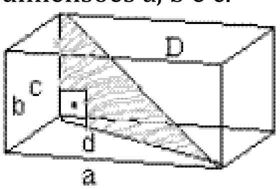
Volume do Prisma

É por definição o produto da área de sua base pela altura, ou seja:

$\boxed{V = S_B \cdot h}$

Paralelepípedo retângulo

É todo prisma reto cujas bases são retângulos. Obtemos a área, o volume e o comprimento da diagonal desse paralelepípedo, de dimensões a, b e c.



Da figura acima calculamos os seguintes valores:

Área do paralelepípedo retângulo:

$\boxed{S = 2.(ab + ac + bc)}$

Volume do paralelepípedo retângulo:

$\boxed{V = a.b.c}$

Diagonal do paralelepípedo retângulo:

$D^2 = d^2 + c^2 \;\therefore\; d^2 = a^2 + b^2 \;\therefore\; D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cubo

É o paralelepípedo retângulo cujas faces todas são quadrados.

Área total do Cubo: É igual a seis áreas de um quadrado de lado a, ou seja:

$\boxed{S_T = 6\,a^2}$

Volume do Cubo

$\boxed{V = a^3}$

Diagonal do Cubo

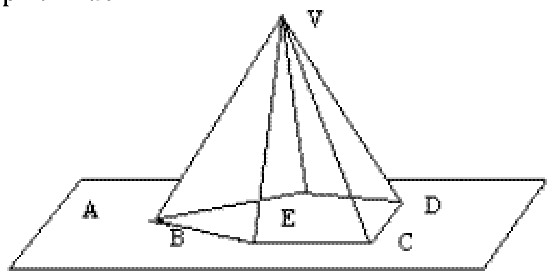
Como as arestas são iguais, isto é a = b = c, então a diagonal é dada por:

$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \;\Rightarrow\; D = \sqrt{3a^2} \;\Rightarrow\; \boxed{D = a\sqrt{3}}$

Dica! Procure olhar as figuras espaciais nas três vistas (frontal, lateral e superior), e use principalmente as duas últimas que não são convencionais; você acaba resolvendo questões mais facilmente.

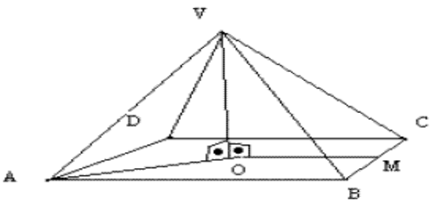
Pirâmides

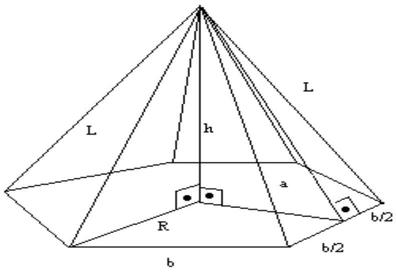
Chamamos de pirâmide ao poliedro que possui todos os vértices em um plano, chamado plano de base, exceto um, denominado vértice da pirâmide.



Pirâmide Regular

Quando a base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro desta. Em uma pirâmide regular as arestas laterais são iguais e consequentemente as faces laterais são triângulos isósceles iguais.





Elementos da Pirâmide
AB – aresta da base
VA – aresta lateral
VO – altura
VM – apótema
OM – apótema da base
O A – raio da circunferência circunscrita (R)

As relações entre os elementos de uma pirâmide regular através dos triângulos retângulos conforme indicados na figura, são:

$\boxed{h^2 + R^2 = L^2}$ $\boxed{h^2 + r^2 = a^2}$ $\boxed{a^2 + (b/2)^2 = L^2}$

Superfície e Volume

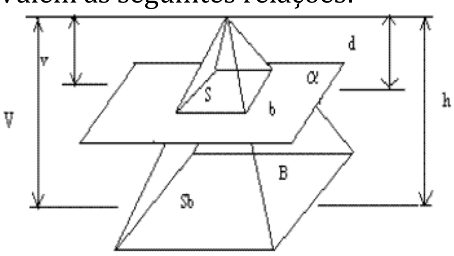
Área Lateral: SL = soma das áreas de todas as faces laterais.

Área Total: $\boxed{S_T = S_B + S_L}$

Volume: $\boxed{V = 1/3.\ S_B.\ h}$

Seções Transversais e Tronco de Pirâmide

Considere uma pirâmide qualquer de altura h, seccionada por um plano paralelo a base e distante d do vértice. O polígono da seção é semelhante à base, sendo a razão de semelhança igual a K = d/h. Valem as seguintes relações:



I) $\frac{d}{h} = \frac{b}{B} = K$ II) $\frac{S}{S_B} = K^2$ III) $\frac{v}{V} = K^3$

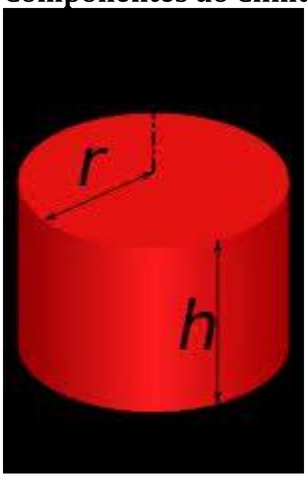
O volume do tronco de pirâmide de bases paralelas é igual a diferença dos volumes das pirâmides (V – v), ou seja:

$$\boxed{V = \frac{h}{3}\ B + \sqrt{Bb} + b}$$

CILINDRO
O cilindro ou cilindro circular é um sólido geométrico alongado e arredondado que possui o mesmo diâmetro ao longo de todo o comprimento.

Essa figura geométrica, que faz parte dos estudos de geometria espacial, apresenta dois círculos com raios de medidas equivalentes os quais estão situados em planos paralelos.

Componentes do Cilindro



Raio: distância entre o centro do cilindro e a extremidade.

Base: plano que contém a diretriz e no caso dos cilindros são duas bases (superior e inferior).

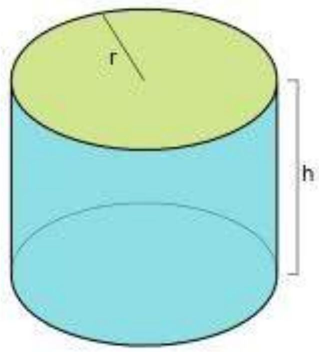
Geratriz: corresponde à altura (h=g) do cilindro.

Diretriz: corresponde à curva do plano da base.

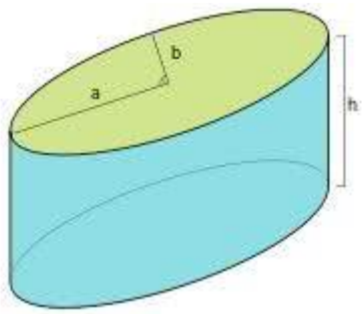
Classificação dos Cilindros

Dependendo da inclinação do eixo, ou seja, do ângulo formado pela geratriz, os cilindros são classificados em:

Cilindro Reto: Nos cilindros circulares retos, a geratriz (altura) está perpendicular ao plano da base.



Cilindro Oblíquo: Nos cilindros circulares oblíquos, a geratriz (altura) está oblíqua ao plano da base.



O "cilindro equilátero" ou "cilindro de revolução" é caracterizado pela mesma medida do diâmetro da base e da geratriz (g=2r). Isso porque sua seção meridiana corresponde a um quadrado.

Fórmulas do Cilindro
Áreas do Cilindro

Área da Base: Para calcular a área da base do cilindro, utiliza-se a seguinte fórmula:
$Ab = \pi.r^2$
Onde:
Ab: área da base
π (Pi): 3,14
r: raio

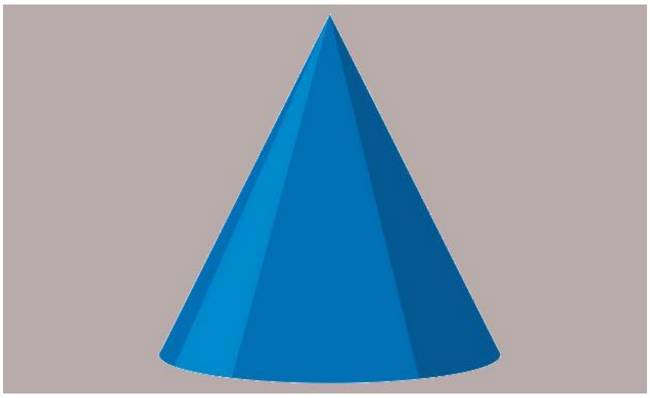
Área Lateral: Para calcular a área lateral do cilindro, ou seja, a medida da superfície lateral, utiliza-se a fórmula:
$Al = 2\ \pi.r.h$
Onde:
Al: área lateral
π (Pi): 3,14
r: raio
h: altura

Área Total: Para calcular a área total do cilindro, ou seja, a medida total da superfície da figura, soma-se 2 vezes a área da base à área lateral, a saber:
$At = 2.Ab+Al$ ou $At = 2(\pi.r2) + 2(\pi.r.h)$
Onde:
At: área total
Ab: área da base
Al: área lateral
π (Pi): 3,14
r: raio
h: altura

Volume do Cilindro

O volume do cilindro é calculado a partir do produto da área da base pela altura (geratriz):
$V = Ab.h$ ou $V = \pi.r^2.h$
Onde:
V:volume
Ab: área da base
π (Pi): 3,14
r: raio
h: altura

Cone



O Cone é um sólido geométrico que faz parte dos estudos da geometria espacial.
Ele possui uma base circular (r) formada por segmentos de reta que têm uma extremidade num vértice (V) em comum.

Além disso, o cone possui a altura (h), caracterizada pela distância do vértice do cone ao plano da base.

Possui também a denominada geratriz, ou seja, a lateral formada por qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice e a outra na base do cone.

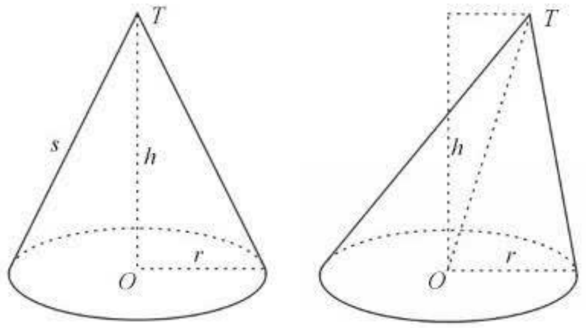
Classificação dos Cones

Os cones, dependendo da posição do eixo em relação à base, são classificados em:

Cone Reto: No cone reto, o eixo é perpendicular à base, ou seja, a altura e o centro da base do cone formam um ângulo de 90º, donde todas as geratrizes são congruentes entre si e, de acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se a relação: $g^2=h^2+r^2$. O cone reto é também chamado de "cone de revolução" obtido pela rotação de um triângulo em torno de um de seus catetos.

Cone Oblíquo: No cone oblíquo, o eixo não é perpendicular à base da figura.
Observe que o chamado "cone elíptico" possui base elíptica e pode ser reto ou oblíquo.

Para compreender melhor a classificação dos cones, observe as figuras abaixo:



Fórmulas do Cone
Áreas do Cone

Área da Base: Para calcular a área da base de um cone (circunferência), utiliza-se a seguinte fórmula:
$A_b = \pi.r^2$
Onde:
A_b : área da base
π (Pi) = 3,14
r: raio

Área Lateral: formada pela geratriz do cone, a área lateral é calculada através da fórmula:
$Al = \pi.r.g$
Onde:
Al: área lateral
π (PI) = 3,14
r: raio
g: geratriz

Área Total: para calcular a área total do cone, soma-se a área da lateral e a área da base. Para isso utiliza-se a seguinte expressão:
$At = \pi.r\ (g+r)$
Onde:
At = área total
π = 3,14
r: raio
g: geratriz

Volume do Cone

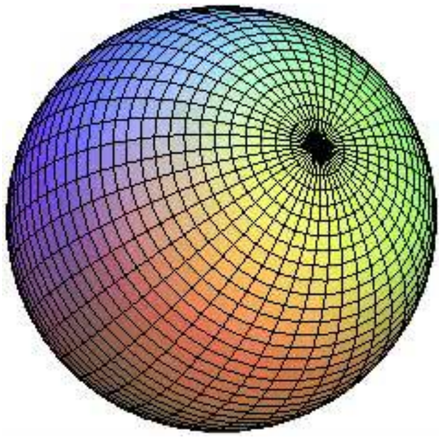
O volume do cone corresponde a 1/3 do produto da área da base pela altura, calculado pela seguinte fórmula:
$V = 1/3\ \pi.r^2.\ h$
Donde:
V =volume
π =3,14
r: raio
h: altura

Esfera

A Esfera é uma figura simétrica tridimensional que faz parte dos estudos de geometria espacial.

A esfera é um sólido geométrico obtido através da rotação do semicírculo em torno de um eixo. É composto por uma superfície fechada na medida que todos os pontos estão equidistantes do centro (O).

Alguns exemplos de esfera são o planeta, uma laranja, uma melancia, uma bola de futebol, dentre outros.



Componentes da Esfera

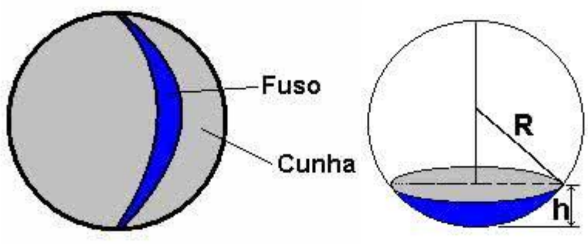
Superfície Esférica: corresponde ao conjunto de pontos do espaço no qual a distância do centro (O) é equivalente ao raio (R).

Cunha Esférica: corresponde à parte da esfera obtida ao girar um semicírculo em torno de seu eixo.

Fuso Esférico: corresponde à parte da superfície esférica que se obtém ao girar uma semicircunferência de um ângulo em torno de seu eixo.

Calota Esférica: corresponde a parte da esfera (semiesfera) cortada por um plano.

Para compreender melhor os componentes da esfera, analise as figuras abaixo:



Fórmulas da Esfera
Área da Esfera

Para calcular a área da superfície esférica, utiliza-se a fórmula:
Ae = 4.π.r2
Onde:
Ae= área da esfera
Π (Pi): 3,14
r: raio

Volume da Esfera

Para calcular o volume da esfera, utiliza-se a fórmula:
$Ve = (4.\pi.r^3)/3$
Onde:
Ve: volume da esfera
Π (Pi): 3,14
r: raio

Unidade V:
Análise combinatória

A análise combinatória ou combinatória é a parte da Matemática que estuda métodos e técnicas que permitem resolver problemas relacionados com contagem.

Muito utilizada nos estudos sobre probabilidade, ela faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre um conjunto de elementos.

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem, também chamado de princípio multiplicativo, postula que:

"quando um evento é composto por n etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, resulta no número total de possibilidades de o evento ocorrer, dado pelo produto (x) . (y)".

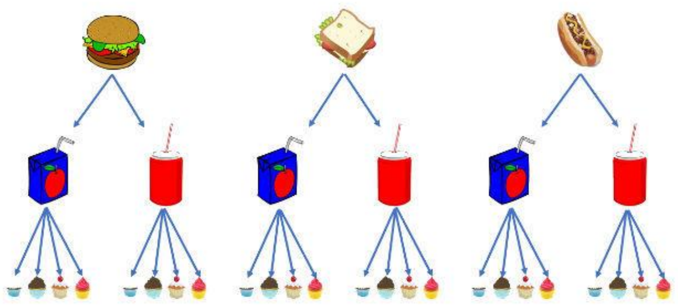
Em resumo, no princípio fundamental da contagem, multiplica-se o número de opções entre as escolhas que lhe são apresentadas.

Exemplo

Uma lanchonete vende uma promoção de lanche a um preço único. No lanche, estão incluídos um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. São oferecidos três opções de sanduíches: hambúrguer especial, sanduíche vegetariano e cachorro-quente completo. Como opção de bebida pode-se escolher 2 tipos: suco de maçã ou guaraná. Para a sobremesa, existem quatro opções: cupcake de cereja, cupcake de chocolate, cupcake de morango e cupcake de baunilha. Considerando todas as opções oferecidas, de quantas maneiras um cliente pode escolher o seu lanche?

Solução

Para solução do problema, o ideal é que se construa, inicialmente, uma árvore de possibilidades, como ilustrado a seguir:



Acompanhando o diagrama, podemos diretamente contar quantos tipos diferentes de lanches podemos escolher. Assim, identificamos que existem 24 combinações possíveis.

Podemos ainda resolver o problema usando o princípio multiplicativo. Para saber quais as diferentes possibilidades de lanches, basta multiplicar o número de opções de sanduíches, bebidas e sobremesa.

Total de possibilidades: 3.2.4 = 24

Portanto, temos 24 tipos diferentes de lanches para escolher na promoção.

Tipos de Combinatória

O princípio fundamental da contagem pode ser usado em grande parte dos problemas relacionados com contagem. Entretanto, em algumas situações seu uso torna a resolução muito trabalhosa.

Desta maneira, usamos algumas técnicas para resolver problemas com determinadas características. Basicamente há três tipos de agrupamentos: arranjos, combinações e permutações.

Antes de conhecermos melhor esses procedimentos de cálculo, precisamos definir uma ferramenta muito utilizada em problemas de contagem, que é o fatorial.

O fatorial de um número natural é definido como o produto deste número por todos os seus antecessores. Utilizamos o símbolo "!" para indicar o fatorial de um número.

Notação: n!

Define-se ainda que o fatorial de zero é igual a 1.

Exemplo

0! = 1

1! = 1

3! = 3.2.1 = 6

7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5 040

10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3 628 800

Note que o valor do fatorial cresce rapidamente, conforme cresce o número. Então, frequentemente usamos simplificações para efetuar os cálculos de análise combinatória.

Arranjos

Nos arranjos, os agrupamentos dos elementos dependem da ordem e da natureza dos mesmos.

Para obter o arranjo simples de n elementos tomados, p a p (p ≤ n), utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo

Como exemplo de arranjo, podemos pensar na votação para escolher um representante e um vice representante de uma turma, com 20 alunos. Sendo que o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante.

Dessa forma, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita?

OBS.: nesse caso, a ordem é importante, visto que altera o resultado final.

Logo, o arranjo pode ser feito de 380 maneiras diferentes.

Permutações

As permutações são agrupamentos ordenados, onde o número de elementos (n) do agrupamento é igual ao número de elementos disponíveis.

Note que a permutação é um caso especial de arranjo, quando o número de elementos é igual ao número de agrupamentos. Desta maneira, o denominador na fórmula do arranjo é igual a 1 na permutação.

Assim a permutação é expressa pela fórmula:

$$P_n = n!$$

Exemplo

De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem se sentar em um banco com 6 lugares.

$P_{6,6} = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720.$

Como a ordem em que irão se sentar é importante e o número de lugares é igual ao número de pessoas, iremos usar a permutação:

Dessa forma, existem 720 maneiras diferentes para as 6 pessoas sentarem neste banco.

Combinações

As combinações são subconjuntos em que a ordem dos elementos não é importante, entretanto, são caracterizadas pela natureza dos mesmos.

Assim, para calcular uma combinação simples de n elementos tomados p a p ($p \leq n$), utiliza-se a seguinte expressão:

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$$

Exemplo

A fim de exemplificar, podemos pensar na escolha de 3 membros para formar uma comissão organizadora de um evento, dentre as 10 pessoas que se candidataram.

De quantas maneiras distintas essa comissão poderá ser formada?

Note que, ao contrário dos arranjos, nas combinações a ordem dos elementos não é relevante. Isso quer dizer que escolher Maria, João e José é equivalente à escolher João, José e Maria.

Observe que para simplificar os cálculos, transformamos o fatorial de 10 em produto, mas conservamos o fatorial de 7, pois, desta forma, foi possível simplificar com o fatorial de 7 do denominador.

Assim, existem 120 maneiras distintas formar a comissão.

Unidade VI:
Probabilidade

A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento aleatório

É aquele experimento que, quando repetido em iguais condições, pode fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Espaço amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral é S.

Exemplo:

Lançando uma moeda e um dado, simultaneamente, sendo S o espaço amostral, constituído pelos 12 elementos:

S = {K1, K2, K3, K4, K5, K6, R1, R2, R3, R4, R5, R6}

Exemplo: Escreva explicitamente os seguintes eventos:
A={caras e um número par aparece}
B={um número primo aparece}
C={coroas e um número ímpar aparecem}

Idem, o evento em que:
a) A ou B ocorrem;
b) B e C ocorrem;
c) Somente B ocorre.

Quais dos eventos A, B e C são mutuamente exclusivos?

Resolução:

Para obter A, escolhemos os elementos de S constituídos de um K e um número par: A={K2, K4, K6};

Para obter B, escolhemos os pontos de S constituídos de números primos: B={K2,K3,K5,R2,R3,R5};

Para obter C, escolhemos os pontos de S constituídos de um R e um número ímpar: C={R1,R3,R5}.

(a) A ou B = AUB = {K2,K4,K6,K3,K5,R2,R3,R5}
(b) B e C = B ∩ C = {R3,R5}
(c) Escolhemos os elementos de B que não estão em A ou C:
B ∩ Ac ∩ Cc = {K3,K5,R2}

A e C são mutuamente exclusivos, porque A ∩ C = $\emptyset$

Conceito de probabilidade

Se em um fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%.

Dizemos que um espaço amostral S (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência. Num espaço amostral equiprovável S (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Propriedades importantes:

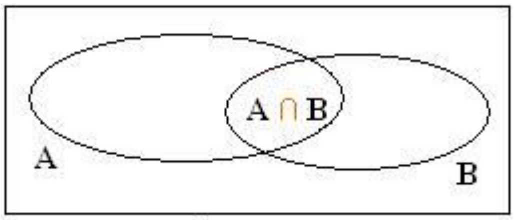
1. Se A e A' são eventos complementares, então: P(A) + P(A') = 1
2. A probabilidade de um evento é sempre um número entre 0 (probabilidade de evento impossível) e 1 (probabilidade do evento certo).

$0 \leq P(S) \leq 1$

Probabilidade da união de dois eventos

Dados dois eventos A e B de um espaço amostral S a probabilidade de ocorrer A ou B é dada por:

P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)



S

Verificação:

O Número de elementos de A U B é igual à soma do número de elementos de A com o número de elementos de B, menos uma vez o número de elementos de A ∩ B que foi contado duas vezes (uma em A e outra em B). Assim temos:

n(AUB) = n(A) + n(B) – n(A∩B)

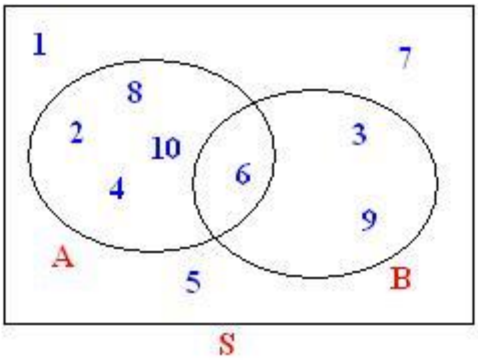
Dividindo por n(S) [$S \neq \emptyset$] resulta

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)}$$

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

Exemplo:

Numa urna existem 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade de ocorrer múltiplos de 2 ou múltiplos de 3?



A é o evento “múltiplo de 2”.
B é o evento “múltiplo de 3”.

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

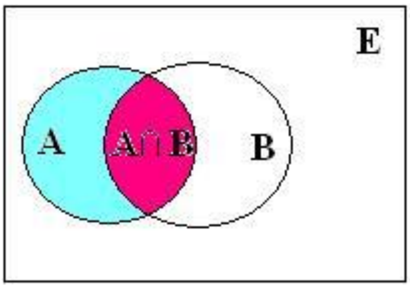
$= \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10} = 70\%$

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional é um segundo evento de um espaço amostral que ocorre em um evento depois que já tenha ocorrido o primeiro.

Para melhor compreensão do que seja probabilidade condicional, considere um espaço amostral S finito não vazio e um evento A de S, se quisermos outro evento B desse espaço amostral S, essa nova probabilidade é indicada por P(B | A) e dizemos que é a probabilidade condicional de B em relação a A.

Essa probabilidade condicional irá formar um novo espaço amostral, pois agora o espaço amostral será A e os elementos do evento B irão pertencer a B ∩ A.



Para calcular a probabilidade P(B | A) deve-se seguir o mesmo raciocínio da fórmula $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$,

Portanto,

$P(B \mid A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)}$ ou $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

E para calcular a probabilidade P(B∩A) basta multiplicar as probabilidades de A e B:

P(B∩A) = P(A) . P(B)

Probabilidade da intersecção de dois eventos

A probabilidade da intersecção de dois eventos determina a chance, a possibilidade, de dois eventos ocorrerem simultânea ou sucessivamente.

Para o cálculo desse tipo de probabilidade devemos interpretar muito bem os problemas, lendo com atenção e fazendo o uso da seguinte fórmula: Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral S. A probabilidade de A ∩ B é dada por:

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A) = p(B) \cdot p(A|B)$$

Onde

p(A∩B) → é a probabilidade da ocorrência simultânea de A e B

p(A) → é a probabilidade de ocorrer o evento A

p(B?A) → é a probabilidade de ocorrer o evento B sabendo da ocorrência de A (probabilidade condicional)

Se os eventos A e B forem independentes (ou seja, se a ocorrência de um não interferir na probabilidade de ocorrer outro), a fórmula para o cálculo da probabilidade da intersecção será dada por:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Exemplo 1. Em dois lançamentos sucessivos de um mesmo dado, qual a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4?

Solução: O que determina a utilização da fórmula da intersecção para resolução desse problema é a palavra “e” na frase “a probabilidade de sair um número ímpar e o número 4”. Lembre-se que na matemática “e” representa intersecção, enquanto “ou” representa união.

Note que a ocorrência de um dos eventos não interfere na ocorrência do outro. Temos, então, dois eventos independentes. Vamos identificar cada um dos eventos.

Evento A: sair um número ímpar = {1, 3, 5}

Evento B: sair o número 4 = {4}

Espaço Amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Temos que:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

Assim, teremos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 2: Numa urna há 20 bolinhas numeradas de 1 a 20. Retiram-se duas bolinhas dessa urna, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de ter saído um número par e um múltiplo de 5?

Solução: Primeiro passo é identificar os eventos e o espaço amostral.

Evento A: sair um número par = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

Evento B: sair um múltiplo de 5 = {5, 10, 15, 20}

Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

Como as duas bolinhas foram retiradas uma após a outra e não houve reposição, ou seja, não foram devolvidas à urna, a ocorrência do evento A interfere na ocorrência do B, pois haverá na urna somente 19 bolinhas após a retirada da primeira. Assim, temos que:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$$

Mas

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Após a retirada da primeira bola, ficamos com 19 bolinhas na urna. Logo, teremos:

$$p(B|A) = \frac{n(B)}{n(S) - 1} = \frac{4}{19}$$

Assim, obtemos:

$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{19} = \frac{2}{19}$$

Eventos independentes

Dizemos que E1 e E2 e ...En-1, En são eventos independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não terem ocorrido.

Fórmula da probabilidade dos eventos independentes:

P(E1 e E2 e E3 e ...e En-1 e En) = P(E1).P(E2).p(E3)...P(En)

Exemplo:

Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Resolução:

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja: P(A e B) = P(A).P(B).

A probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é 10/30 e a de sair azul na segunda retirada 20/30. Daí, usando a regra do produto, temos: 10/30.20/30=2/9.

Veja que na segunda retirada forma consideradas todas as bolas, pois houve reposição.

Assim, P(B/A) =P(B), porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

Referência bibliográfica
PAIVA, Manoel. MATEMÁTICA , vol. único. Editora Moderna,

RAMOS, Danielle de Miranda. "Probabilidade da União de dois Eventos"; Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-uniao-dois-eventos.htm>. Acesso em 17 de fevereiro de 2019.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. "Circunferência trigonométrica"; Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/circunferencia-trigonometrica.htm>. Acesso em 17 de fevereiro de 2019.

SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática. – 1 ed. – São Paulo: FTD, 2010. – (Coleção novo olhar; v. 2)

TROTTA, Fernando. MATEMÁTICA POR ASSUNTO, vol. 5. Editora Scipione.

https://www.todamateria.com.br/determinantes/

https://www.todamateria.com.br/teorema-de-laplace/

https://matematicabasica.net/sistemas-lineares/

https://www.todamateria.com.br/trigonometria-no-triangulo-retangulo/

https://www.todamateria.com.br/funcoes-trigonometricas/

https://www.todamateria.com.br/lei-dos-senos/

https://www.todamateria.com.br/lei-dos-cossenos/

https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/prismas-geometria-espacial/

https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/piramides-geometria-espacial/

https://www.todamateria.com.br/cilindro/

https://www.todamateria.com.br/cone/

https://www.somatematica.com.br/emedio/probabilidade.php

https://alunosonline.uol.com.br/matematica/probabilidade-interseccao-dois-eventos.html

http://www.terra.com.br/matematica/arq12-1.htm

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/206/mod206a.htm

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/206/mat3x3.htm